令和5年度神戸大学経済学部第3年次編入学試験問題

数学

注意：答案には導出過程も記述すること。

第1問 以下の問に答えよ。ただし $\ln(x)$ は自然対数関数、e はネイピア数（自然対数の底）を表わすものとする。

(1) 実数 x が十分0に近いとき $\ln(1+x)$ は x で近似できることを示せ。(5点)

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+rx}\right)^{\frac{t}{x}}$ を e を用いて表わせ（ただし $r>0$、$t>0$ とする)。(5点)

(3) $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x}$ を計算せよ。(5点)

(4) $\int_1^2 xe^x dx$ を計算せよ。(5点)

第2問 微分可能な関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ について、ある区間内のすべての x について微分係数 $f'(x)$ が厳密に正ならば、その区間内で f は厳密な増加関数となることを示せ。ただし平均値の定理を用いること。(10点)

第3問 行列 $A=\begin{bmatrix}\frac{2}{3} & \frac{4}{9}\\ 1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$ について以下の問に答えよ。

(1) A の行列式を求めよ。(5点)

(2) A の逆行列を求めよ。(5点)

(3) A の固有値を求めよ。(10点)

(4) $\lim_{n\to\infty} A^n$ を計算せよ。(20点)

第4問 以下の関数において1階の条件を満たす点を求め、それが極大点（局大点）か極小点（局小点）かそのどちらでもないか判別せよ。

(1) $f(x,y)=x^2+xy+4y^2+4$（15点）

(2) $f(x,y,z)=1-x^2-y^2-z^2-xy$（15点）

令和5年度神戸大学経済学部第3年次編入学試験問題・解答例
数学

第1問

(1) テイラー展開より、

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \ln(1) + x + o(|x|)\\ &= x + o(|x|),\end{aligned}$$

となるので、x が十分 0 に近いとき $\ln(1+x)$ は x で近似できる。

(2) ネイピア数の定義より、

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1+rx}\right)^{\frac{t}{x}} = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{rx}{1+rx}\right)^{\left(-\frac{1+rx}{rx}\right)\left(-\frac{rt}{1+rx}\right)} = e^{-rt}.$$

(3) ロピタルの定理より、

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} x^2e^{-2x} &= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}\\ &= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}\\ &= 0.\end{aligned}$$

(4) 部分積分より、

$$\begin{aligned}\int_1^2 xe^x dx &= [xe^x]_{x=1}^2 - \int_1^2 e^x dx\\ &= [(x-1)e^x]_{x=1}^2\\ &= e^2.\end{aligned}$$

第2問 $x_1 < x_2$ となる区間内の任意の x_1, x_2 について平均値の定理を適用すると、ある $\bar{x}\in(x_1,x_2)$ が存在して $f(x_2)-f(x_1) = f'(\bar{x})(x_2-x_1)$ となる。よって $f'(\bar{x}) > 0$ より、$f(x_2)-f(x_1) > 0$ となる。

第3問

(1) $\det A = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{4}{9} \cdot 1 = -\frac{2}{3}$.

(2) $A^{-1} = \dfrac{1}{-\frac{2}{3}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{4}{9} \\ -1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{3}{2} & -1 \end{bmatrix}$.

(3) 固有値は特性方程式 $\lambda^2 - \dfrac{1}{3}\lambda - \dfrac{2}{3} = (\lambda - 1)\left(\lambda + \dfrac{2}{3}\right) = 0$ の解である。したがって固有値は $\lambda = 1, -\dfrac{2}{3}$ である。

(4) 固有値1に対応する一つの固有ベクトル $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ と、固有値 $-\dfrac{2}{3}$ に対応する一つの固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ より行列 $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$ を定めると、$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$ となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A^n &= \lim_{n\to\infty} B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^n B^{-1} \\ &= B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} B^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & \frac{4}{15} \\ \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

第4問

(1) 一階の条件

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y, \\ 0 &= \frac{\partial f}{\partial y} = x + 8y, \end{aligned}$$

を満たす点は $(0, 0)$ である。この点での f のヘッセ行列を A とすると、$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 8 \end{bmatrix}$、よって $h \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ となる任意の $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$ について、${}^T hAh = (h_1)^2 + 7(h_2)^2 + (h_1 + h_2)^2 > 0$、よって A は正値定符号、したがってこの点は極小点。

(2) 一階の条件

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}=-2x-y,$$
$$0=\frac{\partial f}{\partial y}=-2y-x,$$
$$0=\frac{\partial f}{\partial z}=-2z,$$

を満たす点は $(0,0,0)$ である。この点での f のヘッセ行列を A とすると、$A=\begin{bmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$、よって $h\neq\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$ となる任意の $h=\begin{bmatrix}h_1\\h_2\\h_3\end{bmatrix}$ について、${}^{T}hAh=-(h_1)^2-(h_2)^2-(h_1+h_2)^2-2(h_3)^2<0$、よって A は負値定符号、したがってこの点は極大点。