

2003年1月15日提出

論文題目 不確実性下の投資行動

山口 三十四研究室

学籍番号 9922198E

氏名 藤本 真智子

目次

第1章 課題と方法	2
第2章 景気循環と設備投資に関する歴史的分析	4
はじめに	4
第1節 景気循環とタイミングの歴史的考察	4
第2節 設備投資と日本経済の発展	8
第3節 日本企業の設備投資の実態	13
おわりに	16
第3章 理論分析における数学的準備	17
はじめに	17
第1節 確定的・確率的動的計画法	18
第2節 タイミングの確率構造	25
第3節 企業投資行動の基本モデル	34
おわりに	39
第4章 タイミングの不確実性と企業投資行動	42
はじめに	42
第1節 1度限りの企業環境変化と投資行動（ポアソン過程）	43
第2節 無限回の企業環境変化と投資行動（マルコフ過程）	50
第3節 主観的分布と客観的分布の乖離	56
おわりに	60
第5章 不確実性と投資に関する計量分析	62
はじめに	62

第1節	リアル・オプション理論	63
第2節	重回帰モデルによる計量分析	66
第3節	定常過程とイノベーション会計	71
	おわりに	82
第6章	政策的インプリケーション	84
	あとがき	87
	付録	92

第1章 課題と方法

企業の設備投資行動は、現状と将来動向の適切な把握に基づいて行われる。将来における不確実性は、設備投資に影響を与える重要な決定要因の1つである。近年の日本経済についても、経済動向の不確実性が投資や消費を抑制していると考えられる人は少なくない。本稿では、不確実性下における企業の投資行動について、歴史的・理論的・計量的・政策的分析を行う。まず第2章では、景気循環と日本の設備投資について歴史的に考察する。第1節では、代表的な企業環境変化である景気循環に、不確実性という要素の存在を歴史的観点から検証する。第2節では、日本の資本主義経済の発展を概観することで、マクロ経済における設備投資の役割を歴史的に確認する。第3節では、現実経済における企業の設備投資の決定要因をアンケート調査の結果から明らかにする。また、過剰設備の存在に言及し、投資の非可逆性が現実存在していることを確認する。

第3章、第4章では、企業環境変化のタイミングに関する不確実性が個別企業の資本蓄積行動に与える影響を理論的に分析する。「いつ景気が回復するか」といった状況変化のタイミング問題は、企業経営者にとって最大の関心事の1つである。生産物が予定期間内に売れなければ、投資費用の回収が困難となり、場合によっては倒産を招くことさえあるからである。本稿では、タイミングの不確実性を確率過程で表現し、企業行動を確率的動学問題として分析する¹。第3章では理論分析の数学的枠組みを提供する。第1節では、動的計画法の基礎概念から確率的最適制御までを概説する。第2節では、ポアソン過程と2状態マルコフ過程を用いて企業環境変化のタイミングの不確実性を数学的に記述する。確率論の基礎概念を定義し、必要に応じて定理の証明も行っている。第3節では、本稿の基礎モデルを提示する。また、確実性下における企業環境変化を導入した分析も行う。

第4章では第3章を基礎として、タイミングの不確実性下における企業投資行動を

¹このような理論分析は1980年代以降行われていない。

分析する。第1節では、ポアソン過程で1度限りの企業環境変化に関するタイミング不確実性を表現する。そして、不確実性が投資行動に与える影響とそのメカニズムを解析的に分析する。第2節では、投資の非可逆性を明示的に加味し、企業環境変化が無限回起きる場合について考える。繰り返し起きる企業環境変化に関するタイミングの不確実性は、2状態マルコフ過程で表現し、投資行動に与える影響とそのメカニズムを解析的に分析する。なお、これらの理論分析から導かれる日本経済への含意についても各節において議論する。第3節では、タイミングの確率構造に関する企業の主観的認識が間違えている場合の投資行動について議論する。具体的には、第2節のモデルに「主観的分布と客観的分布の乖離」を仮定し、数値計算を行う。

第5章では、日本における投資と不確実性との関係についての実証分析を行う。なお、タイミングの不確実性の間接的代理変数として、需要の不確実性（移動分散）を用いている。本章は、①不確実性と設備投資②不確実性の代理変数③時系列分析と定常過程の3つを柱として議論を展開する。第1節では、需要水準に関する不確実性を議論するオプション理論を説明する。第2・3節では時系列分析と定常性について言及し、不確実性予測と売上予測、そして投資を用いたイノベーションを会計を行う。

第6章では、本稿で行った歴史的・理論的・計量的分析から得られた結論を総括する。そして、本稿の政策的インプリケーションから、日本経済に関する展望を行うこととする。

第2章 景気循環と設備投資に関する歴史的 분석

はじめに

経済学者や政治家、その他の多くの人々が興味を持ち続けてきたものの1つに景気循環がある。景気循環を理解することによって、その予測や調整を行おうとしてきたのである。景気循環はしばしば、「規則性」を仮定して議論が行われる。クズネツツサイクルやコンドラチェフサイクルはその代表例である。循環の規模や期間、経済諸変数間の関係などは全て規則的なものではない。企業を取り巻く状況の変化は、確率的なタイミングで起きるのである。

第1節では、規則性を主張した代表的景気循環論を中心に、景気変動のタイミングが確率的なものであることを歴史的観点から明らかにする。第2節では、本稿の主要分析対象である日本経済と投資行動についての歴史的考察を行う。歴史的事実を辿ることによって、設備投資が日本経済の発展を実現としてきたこと、そして日本経済の景気循環の主因となってきたことを明らかにする。第3節では、日本の設備投資の決定要因について明らかにする。また、過剰設備に関する議論を行う。これらを通じて、日本の投資行動の実態を明らかにする。

第1節 景気循環とタイミングの歴史的考察

景気循環に規則性があるとする議論は少なくない。本節では、景気循環に関する「様式化された事実」、すなわち循環の規則性が普遍的ではないことを歴史的観点から論じる。この議論は、50年周期のコンドラチェフサイクル (Kondratieff wave) と20年周期のクズネツツサイクル (Kuznets swing) を巡って活発に行われてきた¹。多くの研

¹より短期的循環としてはキチンサイクル、ジュグラーサイクルなど有名である。

表 2.1: Kondratieff's long cycle periods

	First long wave	Second long wave	Third long wave
upswing	1780s-1810/17	1844/51-1870/75	1890/96-1914/20
downswing	1810/17-1844/51	1870/75-1890/96	1914/20-?

究により、これらの循環に必然性がないことが示されてきた。

ロシア人の経済学者であるコンドラチェフは、主要先進国の景気循環が 50 年周期であることを提唱した者の 1 人である。彼は、約 50 60 年の周期をもった価格と産出量の循環を統計分析を通じて提示した。この循環はコンドラチェフサイクルと呼ばれる。コンドラチェフは、1780 1920 年において価格水準が循環的に変動していることを発見した(表 2.1 参照²)。2、30 年間のデフレ期の後、同程度の期間のインフレ期があるというのである³。コンドラチェフの初期の研究では、循環に関する次のような特徴が内生的変動として報告されている。循環の下降局面においては農業がとりわけ不振であること、下降局面に多くの発明が行われ、その応用が上昇局面に行われるとこと、上昇局面において金の生産量が高まること、戦争や革命が上昇局面をもたらす傾向があることなどである。また、50 年周期の長波は資本主義の世界における発展経路を示すものとしても報告された⁴。

シュンペーター (Shumpeter) は、コンドラチェフの考えに発明や投資の懐妊期間を明示的に加え、英国圏に広めた。すなわち、長期的循環は集中的に行われる投資の懐妊期間に由来していると考えたのであった。近年においては、生産ライフサイクルとシュンペーターの考えとを関連付けた長波理論が展開されている⁵。メンシュ(Mensch) は、S 字型成長軌道 (' S '-shaped growth trajectories) を形成する断続的発明ショックで経済成長を説明した。古い技術が寿命を迎えて生産性や経済成長を支えきれなくなる大不況期には基礎的発明が活発であると彼は主張する。長波の源は、規則的に起

²表 2.1 は solomos solomou(1998) より作成。

³1992 年には価格変動にのみ言及した報告であったが、後には実物変数についても同様の循環が見られることを明らかにしている。

⁴長期的には価格と産出量との関係が安定的でないことや、各国の成長期が同時的でないことなどを指摘する批判がある。後者に関しては、コンドラチェフが各国別に成長機会が異なっていることを考慮していなかったことによる。閉鎖経済を想定した議論となっていたのである。

⁵ロストウ (Rostow) やルイス (Lewis) のように、長波を名目的なものとして捉える者もいる。

きる集中的基礎的発明群であると言うのである。

これらの議論を検証するため、様々な手法による実証分析が行われてきたが、各国別データからはコンドラチェフサイクルの存在は明確には確認されなかった。一方、世界経済の成長経路についてはコンドラチェフサイクルが確認されている⁶。しかし、その結果には議論の余地がある。第1に、世界経済の代理変数が適切に成長の程度を反映するものではないという点である。世界経済の代理変数はしばしば、複数国のデータを経済規模で加重平均したものである。この場合、発展途上諸国が目覚しい経済成長を遂げた時期については、経済規模に基づく加重平均で世界経済の成長を観測すると、過小評価してしまうことになるのである。

第2に、経済の変動は各時期に特有の事情に少なからず依存しており、偶発的なものとして考えられる点である。例えば、不況期として位置付けられている1913-1950年には、世界経済の中心の移行や為替制度の変更などといった構造変化による経済成長の失速期が含まれている。少なくとも部分的には、構造的変化が世界経済の循環的側面を生み出していると考えられることができるが⁷、歴史的に記録されている種々の構造変化は事前的に確定していたものではない。従って、世界経済におけるコンドラチェフサイクルの存在を認める場合でも、その規則性には根拠がないのである。

メンシュ(Mensch)の理論に関する実証分析も彼によって行われている。メンシュは、1740-1955年について、127種類の基礎的発明のリストを作成し、規則的な発明の集中が起きることを示そうとした。クヅネッツの行った区分けを利用し、1813-27、1871-85、1926-38を主な不況期として特定化した。結果、彼は基礎的発明の数に関する規則的変動を実証的事実として結論付けている。しかし、この結論にもやはり議論の余地が十分ある。基礎的発明の変数作成が恣意的に行われているからである。第1に、標本抽出の際に基礎的発明の母集団が定義されていないことは問題である。標本が抽出が無作為にされておらず、その分析には歪みが存在するからである。第2に、複数の分野における発明が扱われていることや、各発明の重要度に関する定義が行われていない点も問題である。彼の実証分析の妥当性は甚だ疑わしいものなのである。

以上より、約50年周期をもつ規則的な循環は存在しないと結論付けることができ

⁶マディソン(Maddison)やソロモウ(Solomou)などが1980年以降に論文を発表している。

⁷ここに挙げた構造変化が経済変動の脆弱性に有意な影響を与えていることは、他の研究によって確かめられている。

る⁸。仮に、特定の時期において50年周期のような変動が観測されたとしても、内発的なものではなく、外生的なショックに依るところが大きい。すなわち、経済変動は存在するが、その変動のタイミングは偶発的なものなのである。

アメリカ人の経済学者であるクズネッツ (Kuznets) は、米国経済における景気循環が約20年周期をもつ傾向があることを提唱した者である。クズネッツサイクルは、世界経済における農業・工業間の相対的過剰生産や、外生的な移民により説明される。近年では、経済-人口の内生的相互作用による説明が有力な説明となっている。経済-人口の内生的相互作用とは、所得の上昇による移民の増大が労働供給が拡充し、かつ住宅需要を刺激するといったメカニズムを指す。初期におけるこれらの議論は一定の説明力を有するものであったが、往々にして単一の因果関係を強調しすぎたものであった。クズネッツサイクルの考察には、制度や構造にも着目する必要がある。

1914年以前について行われた実証分析によると、主要先進諸国の様々な経済変数についてクズネッツサイクルが観測されている。ただし、1914年以前に大西洋経済の高い統合度や諸制度など、当時の諸事情についても考慮する必要がある。裁量政策的枠組みが成立していたことや各国の政策が金本位制の信用維持に用いられていたこと、資本と労働の自由な国際間移動が行われていたことなどが重要である。このような制度的要因は、循環の源であると考えることができる。すると、1914年以前のクズネッツサイクルは、国際的な調整メカニズムの一環として捉えることが適切なのである。このことは、構造変化により国際的調整メカニズムが成立しなくなった戦後において、より不鮮明な循環が観測されることから支持される。

コンドラチェフサイクルと同様、規則的循環を主張するクズネッツサイクルについても、その循環周期に関する必然性は存在しない。むしろ、外生的なショックに対する調整メカニズムとしてクズネッツサイクルが成立すると見る説が有力である。外生的ショックのタイミングは偶発的なものであり、調整過程には当時の制度が影響を与えている。クズネッツサイクルの議論からも、景気循環のタイミングは確率的なものとして扱うべきであると言える。

以上より、規則的循環が存在していないと結論付けることができる。特定期間における経済変動が規則的であっても、その発生や過程には外生的な要因が絡んでくる。為替制度を初めとする国際経済の構造は、経済変動に対して有意な影響力を有している

⁸そもそも、約50年という周期に関する理論的必然性は存在しない。

表 2.2: 日本経済の成長要因

	1970-75	75-80	80-84	86-90	90-95
経済成長率	4.50	4.29	3.18	5.18	1.44
資本投入分	3.14	2.54	1.92	2.75	1.26
労働投入分	-0.60	0.96	0.73	0.72	-0.54
総要素生産性上昇分	1.96	0.79	0.53	1.71	0.72

のである。また、景気循環のタイミングは偶発的要因に規定されており、規則性には必然性がないからである。歴史的観点による考察によると、景気循環は確率的なタイミングで生じていると結論付けることができる。本稿の理論分析および実証分析では、ここで確認された「タイミングの不確実性」を明示的に考慮して行うこととする。

第2節 設備投資と日本経済の発展

設備投資は、将来の生産性を高める行動であり、企業成長には欠くことのできない要素である。また、一国経済の発展にとっても非常に重要な物であると言える。表 2.2 は、高度成長期から最近までの日本経済の成長要因を分析したものである。成長要因は、生産要素としての資本と労働による貢献度と、技術進歩の指標で在る総要素生産性 (TFP) の上昇による貢献度とに分解して考えている⁹。表 2.2 より、資本蓄積と総要素生産性の上昇でみた技術進歩とが日本経済の成長を支えてきたことが明らかである。すなわち、設備投資による資本蓄積と、資本や労働に対か去れた新たな技術革新が日本を支えてきたのである¹⁰。勿論、設備投資が必要項目として景気変動の主因のひとつであることも忘れてはいけない。設備投資は、一国経済の重要な構成要素なのである。

⁹表 2.2 の出所：鈴木和志『設備投資と金融市場』。数字は年度別のものである。成長率は各期間の幾何平均を、労働分配率は算術平均をとっている。1985 年度のデータは、NTT 民営化による断層を避けるために利用することを控えている。

¹⁰ソロー残差とも呼ばれる総要素生産性は、生産要素の質の変化や産業間の要素配分の改善などといった様々な残差を含んでいる。R&D 費用などの固定費用が大きい産業ではかなりの大きさになっていた規模の経済効果をも含んでいる。

明治以降の日本経済においても、設備投資は重要不可欠な役割を演じてきた。日本経済は、江戸時代の遺産として持ち合わせていた良質の人材と農業基盤とを基に近代化への道を邁進した。明治政府が数々の構造改革と基盤政策を急速に進める中、明治10年代にはロス・オブ期のいうテイク・オフ期に突入した。そして、明治30年代初めまでにはテイク・オフ期の過程を完了し、近代経済成長の段階へと入ったのである。技術や富の蓄積水準は低かった日本であるが、先に指摘した高い教育水準に支えられた人材が後発国の利益を十分活用することができたため、高速の経済発展を実現できたということができる。また、活発な投資活動の存在がある。

日本の資本主義の発達、殖産興業の名の下で行われた明治政府による一連の活発な設備投資に始まる。伊藤博文率いる工部省、大久保利通率いる内務省を中心に諸投資が行われ、社会的インフラ整備が迅速に行われた。道路・港湾、鉄道設備の整備や電信の開通、郵便制度の確立などがそれに当たる。義務教育の発足、教育施設の整備などの教育投資や技術的知識の獲得を目的とした外国人技師の雇い入れも、人的資本というインフラへの投資として考えることもできる。一方、工業部門への設備投資も行われた。富岡製糸場を始めとする官営模範工場、東京砲兵工廠や横須賀造船所に代表される官営軍需工場が次々と設立されたのである。また、三田育種所や駒場農学校の設立に代表される農業部門への投資も行われていた。

1980年代は紙幣制度や銀行制度の整備など、金融的経済基盤が確立する時期もあった。そして、経済活動の主体が政府から企業へと移行した時期でもあった。累積的財政赤字を解決することを目的としたデフレ政策（松方財政）の一環として官営事業が払い下げられたのである¹¹。政策としても、政府による産業介入が控えられ、自由競争を促進する方針へと転換された。1880年代後半に企業設立ブームが起きていることから確認される。

1890年代は軽工業を中心とする第1次産業革命が起きた。活発な研究開発投資により、紡績業における手紡・ガラ紡から機械紡績への移行や手織機から国産力織機への移行、製糸業における座繰製糸から器械製糸への移行などの技術革新が起きた。これらを背景として、日本の軽工業は1880年代後半から1890年にかけて飛躍したのであった。設備投資の様子は、綿糸や生糸の輸出量や特殊銀行の発達などからうかがうこと

¹¹当時の政商へと払い下げられた。富岡製糸場や三池炭坑などは三井、高島炭坑や佐渡金山などは三菱、足尾銅山や阿仁銀山などは古川へと払い下げられたことは有名である。

ができる。そして1900年代には、日本経済は重工業における躍進、いわゆる第2次産業革命を経験する。日清戦争の賠償金から投資されていた八幡製作所などが中心となっていた。この直後にある明治40年の恐慌には主要財閥が形成されている¹²。その後、1915-18年の第1次世界大戦を背景に日本経済の成長は加速度を増した。1914-19年の間に、輸出額は約4倍になり、工業生産額は約5倍になった。こうして日本はアジア最大の工業国となった。

1920年代以降は一変して、日本経済は恐慌の連続に見舞われることとなる。戦後恐慌、震災恐慌、金融恐慌、昭和恐慌…。当時の日本政府が選んだ方針は、アジア進出による日本経済の復興であった。大東亜共栄圏の基となった日・満・華の円ブロックが形成されたのはこの時期である。5大銀行を代表とする独占資本は一層の発展を遂げた。1930年代に現れた新興財閥に関しては、アジアで軍需・重化学工業を展開するものが多かった。満州を拠点とする日産コンツェルン、朝鮮を拠点とする日窒コンツェルンなどはその代表格である。その後は、これらの財閥と寄生地主制を温床として第2次世界大戦へと突入して行った。

戦後経済は極度のインフレから始まった。金融緊急措置令によるインフレ対策と傾斜生産方式による政府の大型設備投資が行われた。しかし、復興金融公庫による大型貸し出しは再びインフレが激化させ、GHQによる介入が行われた。それが経済安定9原則である。緊縮予算と単一為替レートに代表されるドッジ=ラインや、シャウブ勧告による税制改革が施行された。その一方で、産業復興を目的とするエロア資金が貸し出された¹³。1950年には朝鮮戦争に由来する特需景気が起きた。特需景気は長続きはしなかったが、日本経済の復興を加速することになった。国際通貨基金(IMF)、世界銀行への加盟(1952年)を果たしたのである。また、神武景気が起きた1955年、もはや戦後ではないという復興完了宣言が経済白書から出された。そして、1959-61年の岩戸景気を経て、経済成長率10%を越える高度経済成長期へと突入する。

高度経済成長を支えたものは、旺盛な技術革新と設備投資であった。敗戦後からの旧式設備が老朽化し、設備の更新が盛んに行われた時期である。設備投資は全産業に対して強い市場拡大効果を及ぼした。また設備投資は企業の生産性を高め、製品の競

¹²飛躍的な資本主義経済の発展の陰で、社会主義も発達した。苦しい労働者の様子を綴った文献も少なくない。

¹³ガリオア資金は住民救済を目的とする援助基金であった。

争力を増し、更なる設備投資が求められるという、投資ブームが到来したのである。高度経済成長の経済効果として第1に挙げられるのが、工業生産力の飛躍的拡大である。1960年代に鉄鋼、電力、合成ゴム等々で世界第2位になり、70年代にはセメントやプラスチック、カラーテレビが資本主義世界で第1位となった。乗用車も71年には世界第2位となった。第2に挙げられる経済的達成は、輸出の急速な拡大である。円安政策に支えられる中、重化学工業が輸出の牽引車となり、生産を超える伸び率で輸出が伸びた。こうして増大した外貨の蓄積量を基に海外投資を可能とし、対外資産を所有するに至ったのである。日本経済の国際舞台への台頭は、IMF 8条国への移行や経済協力開発機構(OECD)への加盟などからも知ることができる。

高度経済成長期には新3種の神器¹⁴で広く知られる消費革命が起こり、国民の生活も格別に改善された。1968年には国内総生産が世界2位となった¹⁵。しかし高度経済成長は1971年の金ドル交換停止による変動為替制度への移行、73年の石油ショックなどを契機に終焉を迎える。この時期には、不況とインフレが同時進行するスタグフレーションを経験する。日本経済は約2年の不況の後、世界経済の回復と共に立ち直りを見せた。ただし、重化学工業が成熟段階に達して過剰設備を抱えるに至ったことや主要原料である石油価格が高騰したことなどにより、かつてのような高成長が実現されることはなかった。この時期に重厚長大型産業から軽薄短小型への移行が本格化した。重化学工業が停滞する一方で、コンピュータやセラミックといった先端技術の躍進が見られた。また、省エネルギーへの設備投資も行われていた。これらの機械生産増加の結果、輸出量が伸び、多額の貿易収支の黒字が拡大し、貿易摩擦が生じて国際非難の的となった。

80年代後半には技術革新により世界で初めての商品、もしくは大量生産に成功した商品¹⁶が続出した。これらを組み立てる工程にもコンピュータが導入された。こうした技術革新は過労死を生み出すほどの高密度・長時間労働、および下請け部品企業の徹底利用のもとに遂行された。一方、米国経済は双子の赤字(財政赤字と貿易赤字)に苦しんでいた。こうした日本の貿易黒字額の拡大と米国経済の衰退傾向は止ま

¹⁴ 3Cと呼ばれるカラーテレビ、クーラー、車(カー)のことである。1950年代には3種の神器と呼ばれる白黒テレビ、冷蔵庫、電気洗濯機が国民生活に浸透した。

¹⁵ しかし、急成長の陰には公害を始めとする多くの歪も生じていた。大型化した設備による産業廃棄物が自然の浄化能力を上回り、自然を汚染し、有害物質を周囲に撒き散らすことになったのである。

¹⁶ 液晶式テレビや家庭用コンピューターゲーム、電子手帳やCDなどが代表的である。

らず、ついに 1985 年、プラザ合意において国際的に円安・ドル安が承認されたのである。このプラザ合意を境に円高が急速に進み、円高不況へと陥った¹⁷。これを受けて日本政府は金融緩和・財政引締め政策を行い、内需拡大を志向した。結果、日本経済は約 1 年ほどで不況を脱し、一転してバブル景気(1986- 91 年)へと移行することになった。

バブル期においては土地や株の価格が長期にわたって上昇し続けた。その結果、土地資産・株式資産の額が固定資産(機械や建物)の実物価値の増大を大きく上回るようになった¹⁸。好景気と上昇を続ける地価・株価を背景とした企業の大規模な「財テク」がバブル経済を促進していた。1989 年末の 12 月 29 日、東京証券取引所の日経平均株価は 38915 円にまで高騰した。ところが、バブル経済は 1990 年の株価大暴落を端緒として崩壊した。株価の暴落から半年後、地価の暴落が起きた。これらにより、金融機関は大量の不良債券を抱え込むことになった。証券・不動産パニックは、約 2 年のラグを経て実物経済に波及し、本格的な不況が始まったのである。この影響はまず設備投資や研究開発の減少に現れた。企業はリストラに尽力し、賃金の切り下げや雇用の縮小を行った。結果、労働者の消費力は弱まった。「設備投資不況」から全面的な「消費不況」へと移行・拡大したのである。1991 年に始まった「平成不況」は、政府の判断では 93 年で終わったとされている。しかし、97 年の諸政策による落ち込みもあり¹⁹、不況は長期化している。バブル期の後遺症である過剰設備が未だに解消されず、設備投資に歯止めをかけていることは事実である。また、巨額の財政赤字や高まる「先行き不透明感」なども投資・消費マインドを抑制するものとして考えられている。

以上、設備投資が企業の生産性を高め、一国経済の成長を実現する要素であることを歴史的に確認した。設備投資はこのような供給側の役割ばかりではなく、需要側においても重要な役割を果たしている。設備投資の実質 GDP に占める割合は 9 % から 20 % までを大きく変動してきた。一方、この間の個人消費は、約 60 % 前後を緩慢に推移してきており、設備投資が景気変動の主因であったことが確認される。さらに、製造業対非製造業という大きな括りで見えた場合、景気変動に大きく寄与してきたのは

¹⁷ルーブル合意など、円高ドル安の行き過ぎに対する是正の試みもあった。

¹⁸大胆な銀行貸付に促進され、実物投資も活発に行われていた。

¹⁹97 年までは上向いていた設備投資も、この頃を境に下落し、再び低迷を続けている。

製造業による設備投資であることも分かる。多くの論者に指摘されていることであるが、景気上昇局面においては両産業について相当規模の正の寄与度が観測されるのに対して、景気下降局面においては製造業の寄与度が大きく負となる一方で、非製造業では設備投資の落ち込みをカバーしようとする動きが観測されるからである。不況期においては景気対策の観点から政策的に電力投資の積み増しが実行されてきたことなどがその理由である。

全産業の設備投資を製造業対非製造業という大きな括りで見ただけの場合、1970年代以前は50%ずつで拮抗していた（付録1参照）。しかし1970年代以降は製造業の構成比が次第に縮小傾向をたどり、最近では約30%の水準にまで低下している。製造業縮小の主因は、素材型産業の構成比が1960年前後には25%であったのが1995年前後には9%へと大幅に低下したことである。一方、非製造業拡大の主因は、サービス産業である。サービス産業の中でも、リース産業の設備投資が中心であり、設備投資の代替手段としてリースを活用する企業が他産業で急速に増大しているため、当該産業での設備投資（リース用の機器購入）が増大したのである。従って、リース産業における設備投資額を本来の需要先に戻してみると、設備投資における製造業の設備投資構成比は縮小傾向にあるとはいえ、9%よりは高い水準にある可能性がある。また、製造業による設備投資はシェアを縮小傾向にあるとはいえ、設備投資全体の変動には大きな影響力を有することに変わりはない。

第3節 日本企業の設備投資の実態

第2節では、日本経済における設備投資の重要性を歴史的に考察した。本節では、日本経済における設備投資の決定要因や、バブル崩壊以降に本格的に問題化している過剰設備の実態について概観する。設備投資の決定要因は、設備投資理論の構築にあたっては常に資本収益率と利子率との関係などに求められてきた。現実の企業が実際に考慮する設備投資の決定要因は、旧経済企画庁が実施していた「企業行動に関するアンケート調査」によってある程度知ることができる。表2.3はバブル景気の絶頂期である1991年初と、不況にあえぐ1998年と初めの当該調査から能力増強投資の今後3年間の決定要因についての結果である²⁰。表2.3の各数字は複数回答による構成比で

²⁰鈴木和志『設備投資と金融市場』掲載データより作成。

表 2.3: 今後 3 年間の設備投資の決定要因（複数回答：3 つ以内）

	製造業（1991/1998）	非製造業（1991/1998）
金利動向	30.3/8.1	35.2/16.1
内外需要動向	86.0/85.7	60.7/68.0
収益水準	59.8/59.9	60.2/63.8
人手不足	28.3/13.7	25.5/16.1
他社の動向	15.5/17.4	16.7/20.0

あり、上位 5 位までの要因のみに注目する形で掲載している。

表 2.3 から、企業が考慮する設備投資の主要決定要因が資本の期待収益率や将来に関する不確実性の程度、内部資金の大きさなどであることが分かる。上位 1 位に挙げられている決定要因は「内外の需要動向」であるが、これが企業の期待収益や将来に関する不確実性の程度と深く関連している指標であることから分かる。また、第 2 位に挙げられている「収益水準は、企業の収益性や内部資金の大きさを示す指標となっていることから判断できる。また、「他社の動向」は日本の設備投資について強調される企業の横並び意識を示唆するものとなっている。「金利動向」は、景気上昇局面においては設備投資の決定に密接な関係をもっている。一方、長期化する平成不況下においては、金利水準を政策的に下げても設備投資を必ずしも促進しないということが示されている。

1997 年以降の設備投資の減少も、これらの要因に大きく依存しているものと考えられる。需要の低迷が深刻化する中で設備稼働率が低下し、企業収益や業況感が悪化したことが大きな要因であろう。また、企業の期待成長率も低下していることから、設備過剰感も高まり、設備投資に対する企業の態度が一層慎重なものとなったことが考えられる。さらに、景気の減速を背景に金融機関の貸し出し態度が慎重化し、借入依存度の高い非製造業や中小企業の資金制約が強まったことも要因の 1 つである。

期待成長率と設備投資との間に成立する強い正の相関は既の実証されている事実である²¹。97 年以降の期待成長率の低下には、景気低迷の長期化と中長期的な潜在生産能力の伸び率の低下が影響を与えている。旧経済企画庁の報告書によると、期待成長

²¹旧経済企画庁平成 14 年報告書参照。

率が景気低迷が長期化する中で低下してきたということが指摘されている²²。また、75年以降の趨勢的な日本の潜在生産能力の伸びは、バブル期から鈍化する傾向を帯びており、バブル崩壊後には低迷への一途を辿っているのである。潜在生産能力の伸びの低下は、設備投資の低迷による資本ストックの伸びを鈍化させ、中長期的な労働投入量の減少とともに生産性の伸びの低下をもたらしてきたと考えられる。

近年、大幅な過剰設備の存在についての議論が多くなされている。ここでは、現在の稼働率が過去の平均的な稼働率を下回る程度を資本ストック量に変換したものとして過剰設備を定義する。このように過剰設備を解釈すると、設備が過剰であるかどうかは現在の需要だけでなく将来の需要予想や相対価格などの状況にも左右されることになる。また、過去の平均的な稼働状況に戻るだけでは企業の設備過剰感が残る可能性がある。最近、企業が設備過剰感を高める中で設備投資を抑制し、設備の保有年数を長期化させていることが報告されている。設備の平均的経過年数が長期化していることも指摘されている。こうした設備の老朽化に伴い、生産性や新技術の導入スピードが低下している可能性がある。

しかし、過剰設備が存在しているにもかかわらず、企業は設備投資を実施しており、資本ストックは年率4%前後のペースで伸びている。この要因としては、業種別に見たばらつきが考えられる。財・サービス別の需要の伸びが一様でないことが、設備過剰感や投資動向の業種間格差をもたらしている。結果、経済全体としては過剰設備が存在する一方で設備投資が行われるという現象を引き起こしている。ただし、設備過剰感の高い産業が設備投資を控えているかということ、必ずしもそうではなく、設備過剰感との相関は設備投資行動<需給判断<雇用判断の順序で大きくなる。このことは、設備過剰と雇用過剰がコインの両面の関係にあることを示唆している。また個々の企業は、激しいグローバル市場における競争力を維持する為に投資を持続的に行っている。設備の年齢が上昇して陳腐化が進むと、設備に体化した技術進歩への取組や情報化対応などに遅れが出るので、ある程度の設備投資の実施を続ける必要があるのだ。このことも過剰設備と新規投資の並行を促している。

²²適合的期待仮説を背景とした議論である。

おわりに

本節では、歴史的観点から景気循環のタイミングが確率的であることを論じた。また、日本経済の発展において設備投資が必要不可欠な要因であった一方で景気変動の主因となっていたことを歴史的事実により明らかにした。さらに、企業の投資行動を描写するにあたって非常に重要となる投資の決定要因について、旧経済企画庁によるアンケート調査を基に明らかにした。企業の設備投資の決定には、将来の不確実性の程度や収益率などが考慮されている。このことは、投資に関する諸分析において将来の不確実性を考慮すべきであることを示唆している。

本章における歴史的考察により、投資行動と景気循環（あるいはより広く企業環境の変化）に関するタイミングの不確実性との関係を分析することに一定の価値があることが分かった。また、過剰設備の現状を概観したことにより、一度投資した設備を解除することの困難性を意味する「投資の非可逆性」を考慮することの重要性が確認された。本章における歴史的分析や現状の把握により得られた設備投資の特性は、以後展開される諸分析に考慮することとする。

第3章 理論分析における数学的準備

はじめに

現実の企業にとって、タイミングの不確実性はとりわけ重要な関心事の1つである。生産物が予定期間内に売れなければ投資費用の回収が困難となり、場合によっては倒産に至ることさえあるからである。日本経済においても、「いつ景気が良くなるのか」というタイミングの問題は多くの関心を寄せている。タイミングに関する不確実性を扱う分析は、Nickell (1978) 等で展開されている。しかし、基本的な枠組みは提供されているものの、企業の最適化問題は解析的には解かれていない。また彼は、投資の特徴として配送や設置に纏わる時間的遅れを主に取り上げ、不確実性の影響を考察しているのだが、連続時間モデルの枠組みの中に離散的時間概念である配送ラグ (Delivery lag)¹を導入しているため、時間に関する若干の混乱がある。Nickell (1978) 以降にタイミングの不確実性と設備投資行動の分析を深化させた研究は存在しない²。

本章では、理論分析の基礎となる数学的手法についての説明を行う。そして、Nickell の提示した問題を定式化し直すこととする。第1節では、動的計画法の概念について概説し、本稿で扱う確率的最適制御問題へと議論を進める。第2節では、「タイミング不確実性」の数学的記述について議論する。確率論の基礎を概説した上でポアソン過程と2状態マルコフ過程について説明し、第4章のモデルにおける役割を明らかにする。モデルに応用する上で重要な含意を持つ定理については証明も行う。第3節では、次章の基本モデルとなる、企業の動学的投資決定問題の定式化を行う。また、確実性下で企業環境変化を導入し、均衡における企業行動の特徴を明らかにする。

¹彼の言う配送ラグは、いわゆる「投資の懐妊期間」と解釈して差し障りない。

²後に説明するように、他の分野における同質の問題は取り扱われている。

第1節 確定的・確率的動的計画法

動学問題と最適性の原理

現実のほとんどの問題は、多時点間の資源配分の問題として定式化される³。動学問題には、経済主体が当期において影響を与えることが出来る操作変数と与えることが出来ない外生変数の他に、状態変数というものを含む。経済主体は当期の状態変数について影響を与えることは出来ないが、当期の操作変数はそれ以降の状態変数に影響を与える。この状態変数こそが、動学的性質を表すものである。本稿で扱う企業の投資決定は、動学的視野から分析されるべき代表的な問題である。仮に、資本設備に関するあらゆる市場が完備されており、資本設備が完全に移動可能であるならば、投資行動を動学的に考える必要はない。しかし、資本の移動に多大な費用がかかること、投資に種々の調整費用がかかること、そして資本設備の流通市場が欠如していることなどが実情である。

動学問題を扱う手法には、最大値原理と変分法、そして動的計画法 (Dynamic Programming: DP) の3つがあるが、ここでは動的計画法について説明する。動的計画法は、動学的問題を時間とともに逐次的に決定されるべき問題であることに注目した考え方である。全体の最適化問題を各期の独立した最適化問題の連なり、すなわち多段階決定過程⁴に帰着させるのである。動的計画法は、線形・非線形・確定的・確率的・有限期間・無限期間の問題について、同一の形式で統一的に論じることができるという特徴を有している。従って、無限視野の問題や確率的問題に対し、動的計画法が優れて有効な手法となる。動的計画法を支えるものは、『最適性の原理』と呼ばれるものである。『最適性の原理』とは、 $t \geq 0$ について一意的解の存在が保証されている定差(微分)方程式の系について、時点 $s+t$ における解が時点 s を所与として導かれる時点 $s+t$ における解とが一致するという原則である⁵。すなわち、任意の初期値を所与として決定した最適な制御政策は、最適な経路上における残りの期間においても最適でなければならないというものである。この原理により、動的計画法が適応される問

³このように定式化される問題は、動学的な最適化問題と呼ばれる。

⁴各段階において時間だけに依存するのではなく、系の現在の状況にも依存する集合が存在するとき、そのような過程を「多段階決定過程」という。

⁵このような異なった仕方で到達された最終状態の等値性は、「古典物理学における因果律の原則 (principle of causality)」と呼ばれていた。最適性の原理はこれを受け継ぐものである。

題には、時間整合性 (time consistency) の制約がかかることになる。目的関数は、マルコフ特性を満たすものでなければならない。

マルコフ特性とは、任意の時点 t_0 における状態ベクトルの知識が得られた場合、時点 $t < t_0$ における系の状態についての知識を、情報の損失なしに捨て去ることができるという性質である。マルコフ特性が満たされている場合、任意の時点において先立つ情報を考慮することなしに、それ以降の問題を考えることができる⁶。ここで、離散的多段階過程を用いて考える⁷。いま、ある時点 t における状態変数と操作変数をそれぞれ K_t 、 I_t とすると、政策関数 (policy function) は

$$I_t = I(K_t) \quad (3.1)$$

と表すことが出来る。各期において、各状態を所与とした最適な変換 (操作変数の選択) がなされ、遷移式を通じて一意的な次期の状態変数が出力される。

$$i.e. \quad K_{t+1} = g(I(K_t), K_t) \quad (3.2)$$

全体が N 期からなる問題の目的関数 $F(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ を $K_{t+1} = g(I(K_t), K_t)$ の下で最大化する問題を考える。いま、マルコフ特性 (時間整合性) を有する代表的利得関数として

$$F(\mathcal{K}, \mathcal{I}) = \pi(I_1, K_1) + \pi(I_2, K_2) + \dots + \pi(I_N, K_N) \quad (3.3)$$

を考える。 $(\mathcal{K}, \mathcal{I})$ は N 次元のベクトルである。この最大化問題は、各期において最適な I_t を選択する問題と同じとなる。ここで、(3.3) 式の最大値は存在し、関数 $\pi(\cdot)$ は全ての有限な I_t と K_t について有限であるものとする。 K_1 がある領域に存在するとき、

$$V_N(K_1) = \max_{\{I_t\}} \{\pi(I_1, K_1) + \pi(I_2, K_2) + \dots + \pi(I_N, K_N)\} \quad (3.4)$$

なる関数関係 $\{V_N(K_1)\}_{N=1,2,\dots}$ を得る。この関数関係のメンバーである関数 $V_1(K_1)$ は

$$V_1(K_1) = \max_{I_1} \pi(I_1, K_1) \quad (3.5)$$

⁶マルコフ性を満たす確率過程以外を動的計画法で扱うことができないのは最適性の原理による。

⁷無限に連なる各期の集合として連続時間を捉えるならば、とりわけ限定的な議論とならないことが理解できよう。

与えられる。このような目的関数の加法分離性により、(3.4) 式を次のように変形することができる。

$$\begin{aligned} V_N(K_1) &= \max_{I_1} \max_{I_2} \dots \max_{I_N} \{\pi(I_1, K_1) + \pi(I_2, K_2) + \dots + \pi(I_N, K_N)\} \\ &= \max_{I_1} \left\{ \pi(I_1, K_1) + \max_{I_2} \dots \max_{I_N} [\pi(I_2, K_2) + \dots + \pi(I_N, K_N)] \right\} \end{aligned} \quad (3.6)$$

さて、(3.6) 式の第 2 項に注目してみると、 K_2 が発生した時の (N-1) 期間に関する目的関数となっていることが分かる。すなわち、

$$V_{N-1}(K_2) = \max_{I_2} \dots \max_{I_N} \{\pi(I_2, K_2) + \dots + \pi(I_N, K_N)\} \quad (3.7)$$

と書き直すことが出来る。ここで、(3.6) 式に遷移式と (3.7) 式を考慮すると、

$$V_N(K_1) = \max_{I_1} \{\pi(I_1, K_1) + V_{N-1}(g(I_1, K_1))\} \quad (N = 2, 3, \dots) \quad (3.8)$$

を得る。(3.8) 式は、関数関係 $\{V_N(K_1)\}_{N=1,2,\dots}$ の各メンバーに結びついたものとなっている⁸。関数関係 $\{V_N(K_1)\}_{N=1,2,\dots}$ は、価値関数 (Value function) とも呼ばれる。

確定的動的計画法

不確実性が存在しない場合の動的計画法について説明する。以下では連続時間モデルを扱うこととする。計画期間については、有限視野を扱う⁹。

いま、計画期間が $[0, N]$ である問題を考える。

$$\max_{I_t} \int_{t=0}^N \pi(t, I_t, K_t) dt + \phi(K_N, N) \quad (3.9)$$

目的関数はマルコフ性を満たすものとする。ここで、任意の時点 t_0 で状態 K_0 を所与とした場合に、それ以降に実現することが出来る最大の価値を、価値関数 $V(K_0, t_0)$ として定義する。価値関数を用いて上の問題を書き直すと、

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_{I_t} \int_{t=t_0}^N \pi(t, I_t, K_t) dt + \phi(K_N, N) \quad (3.10)$$

$$s.t. \quad \dot{K}_t = g(I(K_t), K_t, t) \quad , \quad K(t_0) = K_0 : given \quad (3.11)$$

⁸有限期間モデルの場合には、終期区間である N 期について最適化問題を解き、N 期における最大価値を所与として、(N-1) 期の問題を解くことができる。同様の作業を初期区間にまで遡ることにより、全期間における最適な変数が求まるというわけである。

⁹無限期間の問題は、有限期間の問題の極限として捉えることができるからである。

となる。ただし、 $V(K_N, N) \equiv \phi(K_N, N)$ と定義している。目的関数の加法分離性により、(3.10) 式を微小期間 $[t_0, t_0 + \Delta t]$ と $[t_0 + \Delta t, N]$ に分離して考えることが出来る。

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_{I_t} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \pi(t, I_t, K_t) dt + \int_{t_0+\Delta t}^N \pi(t, I_t, K_t) dt + \phi(K_N, N) \right\} \quad (3.12)$$

最適性の原理より、操作変数は状態 $K(t_0 + \Delta t) = K_0 + \Delta K$ を所与とした $t_0 + \Delta t \leq t \leq N$ における問題についても最適であるので、(3.12) 式は次のように書き換えることが出来る。

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_{I, t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t} \left\{ \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} \pi(t, I_t, K_t) dt + V(K_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t) \right\} \quad (3.13)$$

(3.13) 式は、 $t_0 \leq t \leq N$ で得られる最大価値が $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ における最大利得と、 $t_0 + \Delta t \leq t \leq N$ において $K_0 + \Delta K$ を所与として最適に行動し続けた結果得られる利得 $V(K_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$ との和であることを意味している。(3.13) 式について最適化条件を導くために、右辺の第 1 項を $\pi(K_0, I_0, t_0)\Delta t$ と近似する。 Δt が微小な値であることから、制御が $t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t$ において不変であるものと考え、積分の下限時点における $\pi(\cdot)$ の高さと同積分の幅とを掛け合わせたものとして近似している。さらに、価値関数 $V(\cdot)$ の 2 回微分可能性を仮定してテーラー展開し、 K_0 周りで線形近似する。(3.13) 式は次のように書き換えられる。

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_{I, t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t} \left\{ \pi(t_0, I_0, K_0)\Delta t + V(K_{t_0}, t_0) + V_t(K_0, t_0)\Delta t + V_K(K_0, t_0)\Delta K + h.o.t. \right\} \quad (3.14)$$

ここで V_t 、 V_K はそれぞれ t 、 K に関する偏微導関数である。(3.14) 式の両辺から $V(K_0, t_0)$ を差し引き、 Δt で割り、さらに $\Delta t \rightarrow 0$ に伴う極限をとると、

$$0 = \max_{I, t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t} \left\{ \pi(t_0, I_0, K_0) + V_t(K_0, t_0)\Delta t + V_K(K_0, t_0)\dot{K} \right\} \quad (3.15)$$

を得る。このような関係は、任意の t_0 について成立しているので、(3.15) 式はより一般的に t について書き直すことが出来る。最後に、遷移式を考慮すると

$$-V_t(K, t) = \max_I \left\{ \pi(t, I, K) + V_K(K, t)g(I_t, K_t) \right\} \quad (3.16)$$

が得られる。この式は、最適な価値関数 $V(\cdot)$ が満たす基本的な偏微分方程式で、「ハミルトン-ヤコビ-ベルマン方程式 (Hamilton-Jacobi-Bellman equation)」と呼ばれているものである。

ところで、(3.16) 式の右辺はハミルトン関数の最大値となっている。 t 時点における状態変数を K_t とすると、価値関数 $V(t, K_t)$ は状態変数 K_t を所与とした場合に実現可能な最大価値の割引現在価値である。従って、 V の K_t に関する偏微分 $\frac{\partial V}{\partial K_t}(t, K_t)$ は K_t を限界 1 単位だけ増大させた場合の総現在価値の変化分であるので、状態変数 K_t の限界的現在価値となっている。すなわち、 $\frac{\partial V}{\partial K_t}(t, K_t)$ は状態変数の（現在における）潜在価格となっており、 V_K がハミルトン乗数と同様の働きをしている。以上より、(3.16) 式の右辺はハミルトン関数の最大値であると言える。

この方程式 (3.16) 式より、価値関数 $V(\cdot)$ を最大化するような操作変数を見出し、境界条件 $V(K_N, N) \equiv \phi(K_N, N)$ と合わせて解を導くことになる。ただし、動的計画法を用いて厳密解を求めることは一般に困難である。従って、動的計画法は主に、最適制御の必要条件を求めるために用いられる。数値計算により解を求め、分析することも多い。

確率的動的計画法

不確実性の導入としては、状態変数の遷移式に確率的ショックを考慮することが最も一般的であろう¹⁰。

$$i.e. \quad \dot{K}_t = g(I(K_t), K_t, \xi_t, t) \quad (3.17)$$

ξ_t は確率的要素を示している¹¹。この場合、 I_t および K_t が与えられた後においても、 K_{t+dt} については確率的にしか明らかではない（不確実性）。このようなとき、合理的経済主体は目的関数の期待値を最大化するように行動する¹²。

これまでと同様に、時点 t_0 の状態変数 K_{t_0} を所与として、達成可能である最大価値として価値関数 $V(K_{t_0}, t_0)$ を定義する。いま、 $K_{t_0+\Delta t}$ の実現値が得られたとすると、 $V(K_{t_0+\Delta t}, t_0 + \Delta t)$ が定義される。しかし、時点 t_0 において次期の状態変数に関しては確率密度関数しか分かっていないので、 $V(K_{t_0+\Delta t}, t_0 + dt)$ は確率変数である。従っ

¹⁰このような定式化は、消費のライフサイクル仮説や実物景気循環論 (RBC) など、合理的期待仮説に立脚した議論で広く行われている。

¹¹しばしば、 $\xi_t \sim \text{i.i.d}$ と仮定して議論される。

¹²期待効用仮説を適用した考え方となっている。

て、最適性の原理に基づく再帰式は

$$V(K_{t_0}, t_0) \equiv \max_{I, t_0 \leq t \leq t_0 + \Delta t} \left\{ \int_{t=t_0}^{t_0 + \Delta t} \pi(t, I_t, K_t) dt + E[V(K_{t_0 + \Delta t}, t_0 + \Delta t)] \right\} \quad (3.18)$$

となる。 $E[\cdot]$ は時点 t までの情報を前提とした条件付期待値を計算するオペレータである。

先に述べたように、動的計画法の接近法は不確実性を考慮しても確定的問題と同様である。ただし、目的関数がマルコフ特性を満たしていなければならないことから、考慮することができる確率過程もマルコフ過程¹³に制限されることになる。

次に、本稿の主題の1つである「タイミングの不確実性」を考慮する場合の確率的制御問題を定式化する。目的関数に関するシフトパラメーター $z_i (i=H, L)$ が存在し、 z_i により2つの状態が規定されている。まず、第4章1節で扱う問題のように、状態の変化が1度限りで、その変化するタイミングのみが不確実であるような場合についての定式化を行う。ここで、任意の t を見本経路 (sample path) 上の政策変更時点とし、ある時点 t に状態のスイッチが起きる確率を Π_t とする。いま、ある微小期間 $[t, t + dt]$ 内に状態のスイッチが起きる確率を $\epsilon_t dt$ とする。

$$i.e. \quad \epsilon_t dt \equiv \frac{\Pi_{t+dt} - \Pi_t}{\Pi_t} \quad (3.19)$$

(3.19) 式について、 $dt \rightarrow 0$ に関する極限が ϵ_t となることは明らかである。初期状態が確定されており、かつ、状態のスイッチが1度限りであることを考慮すると、 ϵ_t は「時点 t までにスイッチが1度も起きなかったという条件の下で、時点 t にスイッチが起きる条件付確率」ということになる。従って、 ϵ_t は次のように定義される。

$$i.e. \quad \epsilon_t \equiv \frac{\Pi_t}{1 - \Omega_t} \quad (3.20)$$

$$where \quad \Omega_t \equiv \int_0^t \Pi_\tau d\tau \quad (3.21)$$

任意 t を見本経路上のスイッチが起きる時点であるとすると、その時点における状態変数は K_t と示される。 $\tau \geq t$ についての問題は次のようになる。

$$V_H(K_t, t) \equiv \max_I \int_t^\infty e^{-r\tau} \pi_H(I_\tau, K_\tau) d\tau \quad (3.22)$$

$$s.t. \quad \dot{K}_\tau = I_\tau - \delta K_\tau$$

¹³マルコフ過程とは、マルコフ特性を満たす確率過程のことである。確率構造に関しては第2節において詳細に議論する。

従って、全計画期間に関する問題は

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_I \int_0^{\infty} \{e^{-rt}(1 - \Omega_t)\pi_L(I_t, K_t) + \Pi_t V_H(K_t)\} dt \quad (3.23)$$

$$s.t. \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad , \quad K_0 : \text{given} \quad , \quad t_0 = 0$$

と記述されることになる¹⁴。以上議論したような問題についても、基本的な考え方は確定的問題と同じであるので、理論的には再帰的に解を導くことができる。

この節の最後として、第4章第2節で扱う問題のように、状態が一定の確率でHとLとの間を推移するような場合、すなわち、スイッチが繰り返し起きる場合について考える。状態Hにあるとき、微小時間 (dt) 後に状態Lである確率が νdt であるものとする。一方、状態Lにあるとき、微小時間後に状態Hにある確率は ϵdt であるとする¹⁵。先の議論とは異なり、スイッチは1度限りではないため、確率的要素はスイッチ後においても存在する。以上より、任意の時点 t における価値関数は、状態に応じて次のように定義される。

$$V_H(K_t, t) \equiv \max_I \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)} \pi_H(I_s, K_s) ds + E[V(K_{t+dt})]$$

$$= \max_I \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)} \pi_H(I_s, K_s) ds$$

$$+ e^{-r dt} \{e^{\nu dt} V_L(K_{t+dt}) + (1 - e^{\nu dt}) V_H(K_{t+dt})\} \quad (3.24)$$

$$V_L(K_t, t) \equiv \max_I \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)} \pi_L(I_s, K_s) ds + E[V(K_{t+dt})]$$

$$= \max_I \int_t^{t+dt} e^{-r(s-t)} \pi_L(I_s, K_s) ds$$

$$+ e^{-r dt} \{e^{\epsilon dt} V_H(K_{t+dt}) + (1 - e^{\epsilon dt}) V_L(K_{t+dt})\} \quad (3.25)$$

これまでと同様、 $V_i(\cdot)$ は状態 i における価値関数を表している。また、 $E[\cdot]$ は時点 t までの情報を前提とした条件付期待値を計算するオペレーターである。

(3.24)(3.25) 式で定義された価値関数は、微小期間中に生み出される価値と、来期以

¹⁴このような問題の定式化は、労働の search problems などで行われている。また、本稿の参考文献としても挙げている Dasgupta-Stiglitz(1981) においても用いられている。

¹⁵厳密には、2状態のマルコフ過程を想定したものとなっている。確率構造およびマルコフ過程に関する詳細な議論は本章第2節にて行う。

降に生み出される価値との和になっている¹⁶。ただし来期以降の価値は、確率によって加重平均したものとなっている。 $e^{\nu dt}$ と $(1 - e^{\nu dt})$ とはそれぞれ、微小期間 $[t, t + dt]$ の間に H から L へのスイッチが 1 回以上起きる確率、0 回以下起きる確率を示している。同様に $e^{\epsilon dt}$ 、 $(1 - e^{\epsilon dt})$ は微小期間 $[t, t + dt]$ の間に L から H へのスイッチが 1 回以上起きる確率、0 回以下起きる確率を示している。

(3.24)(3.25) 式から明らかなように、状態間のスイッチが繰り返し起き、かつそのタイミングが不確実であるような問題を考える場合には、価値関数の連立方程式体系となる。従って、議論はこれまでよりも複雑なものとなっているが、基本的な考え方はこれまでと同じである。理論的には、価値関数についての連立方程式を用いて、再帰的に解を求めることができる。

第 2 節 タイミングの確率構造

確率過程

「不確実性」という表現を解析的に扱うために、発生し得る状態とその確率のみが明らかである状況を「不確実性」として捉える。例えば賽の目について、生じうる事象とその確率は明らかであるが、100% の確信をもって次に実現する目を断定することはできない。このような状況を「賽の目に関する不確実性」として取り扱うのである。まず、確率空間を定義する¹⁷。

定義 1：確率空間

見本空間 Ω 、 σ - 集合体 \mathcal{B} 、確率 P の組 (Ω, \mathcal{B}, P) を確率空間という。

定義にあるように確率空間とは、見本 (標本) 空間、 σ - 集合体 (事象空間)、および確率 (測度) の組合わせのことである。分析者が問題にしようとする全ての現象について記号化を行ったとき、その記号 (標本点) の全体集合を見本空間という。見本空間が定義されると、その部分集合として事象を定義することができる。いま、見本

¹⁶連続時間モデルを用いているので、「今期」「来期」といった表現は必ずしも適切なものではないが、直感的理解を促すため用いている。

¹⁷本節に提示する定義のは、小和田正『確率過程とその応用』(1983)によるものである。

空間を Ω とすると、 Ω に属する任意の部分集合 $E \in \Omega$ を事象として定義するのである。この段階で、見本空間の任意の単独部分集合については議論することができる。しかし、分析では必ずしも単独事象を扱うばかりではない。すなわち、任意の2つ以上の事象（部分集合）に集合演算を用いて生成した新たな集合をも事象として扱われる必要がある。そこで、「事象空間」を次のように定義する。

定義 2 : 事象空間

見本空間 Ω の部分集合の族 \mathcal{B} が、

(1) $E \in \mathcal{B}$ ならば $E^c \in \mathcal{B}$ (2) $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B}$ ならば $\cup_{i=1}^{\infty} E_i \in \mathcal{B}$ (3) $\Omega \in \mathcal{B}$
 の3つの条件を満足するとき、 \mathcal{B} を Ω の σ -集合体、あるいは事象空間と呼ぶ。

事象空間の直観的意味が「標本空間に属する全ての部分事象を含む集合」である。事象空間とは、見本空間の任意の部分集合 E と、任意の集合族 $\{\mathcal{E}\}$ 全てを包含する完全加法的集合として定義されているのである。すなわち、事象空間は最小のボレル集合体となっている。ボレル集合体とは、次のように定義されるものである。

定義 3 : ボレル集合体

n 次元ユークリッド空間 \mathcal{R}^n において、半开区間の族が生成す σ -集合体

$$\mathcal{B}_{\mathcal{R}} = \sigma\{(a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] , -\infty < a_i < b_i < \infty, i = 1, \dots, n\} \quad (3.26)$$

$$\text{where } (a_1, b_1] \times \dots \times (a_n, b_n] = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{R}^n; a_i \leq x_i \leq b_i, i = 1, 2, \dots\}$$

をボレル集合体という。

確率空間の最後の要素である確率は、次のように定義される。

定義 4 : 確率

見本空間 Ω と σ -集合体 \mathcal{B} が与えられているとき、 \mathcal{B} 上の実数値関数 $P(\cdot)$ が次の条件を満たすならば、 $P(\cdot)$ は確率と呼ばれる。

$$(1) 0 \leq P(E) \leq 1 , E \in \mathcal{B} \quad (2) P(\Omega) = 1$$

$$(3) E_1, E_2, \dots \in \mathcal{B} , E_i \cap E_j = \emptyset , i \neq j \text{ について } P(\cup_{j=1}^{\infty} E_j) = \sum_{j=1}^{\infty} P(E_j)$$

確率空間に関する定義が完了したので、確率変数および確率過程へと議論を進める¹⁸。まず、確率変数の定義を与える。

定義 5：確率変数

見本空間 Ω と σ -集合体 \mathcal{B} の組 (Ω, \mathcal{B}) が与えられてたとき、 Ω 上の実数値関数 $X = X(\omega)$ に対し、全ての实数値 x について $\{\omega; X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{B}$ が成立するとき、 X を確率変数と呼ぶ。

定義から明らかなように、確率変数 X がどのような値をとるかは、出現する $\omega \in \Omega$ に依存する。すなわち、確率変数 X は、 Ω 上に定義された関数なのである。確率変数は“偶然に変動する量”を数学的に定式化ものである。次に、“「時間の経過とともに」偶然的に変動していく量”を数学的に定義する。

定義 6：確率過程

確率空間 (Ω, \mathcal{B}, P) 上の確率変数の系列 $\{y_t; t \in \Lambda\}$ をパラメータ空間 Λ を持つ確率過程という。 y_t のとる値の集合を S_t とする時、 $S = \bigcup_{t \in \Lambda} S_t$ を確率過程 $\{y_t; t \in \Lambda\}$ の状態空間 (state space) という。

$\{y_t; t \in \Lambda\}$ は確率変数の集合として捉えることができる。確率過程は t と $\omega \in \Omega$ の関数となっているからである。確率過程 $\{y_t\}$ は、任意の $\omega \in \Omega$ を固定すると Λ 上に定義された実数値関数となっている。また、任意の $t \in \Lambda$ を固定すると、 Ω 上に定義された実数値関数となっているのである。

本稿では、動学的最適化問題についての分析を行うが、その議論の中心は定常均衡分析にある。確率の概念を導入した場合においても、やはり時間を通じて一定の性質を持つ定常均衡の存在は必要である。不確実性の導入によって、定常均衡の性質が時間を通じて様々に変化するならば、明確な洞察を得ることが難しいからである。従って、理論モデルに確率過程を組み込む場合には、確率論的に平衡状態に達しており、時間に依存しない性質を有する定常過程を用いる必要がある。

¹⁸事象、事象空間、および確率についての重要な定理は多数存在するが、その定理および証明については本稿では割愛する。

ポアソン過程

確率過程の中で理論的扱いが比較的容易で、かつ実際問題によく使われるものの1つに計数過程 (counting process) がある。これは、注目している特定の事象が起きた回数の経時変化を記録するものである。本節で説明するポアソン過程は計数過程の1つである。一定期間内にレジに到着した顧客数、バス停を到着したバスの台数など、ポアソン過程に従うものとみなされる事柄は少なくない。第4章第1節では、企業環境変化が起きるという事象の計数過程がポアソン過程であるものと仮定する。この仮定により、企業環境変化の起きるタイミングが不確実であるという要素を動学的資本蓄積問題に加味することが可能となる。本節の議論を通じて、この理屈を明らかにする。

ここで、計数過程 $\{N_t\}$ を厳密に議論するために、必要な概念とその記号とを定義する。観測を開始した時点 $t = 0$ とし、注目した現象が起きた時刻を生起時刻と呼び、 T_1, T_2, \dots と表すこととする。現象の生起間隔を $D_1 = T_1 - 0, D_2 = T_2 - T_1, D_3 = T_3 - T_2, \dots$ とする。そして、時刻 0 から時刻 t までの間 $(0, t]$ に現象の起きた回数を N_t と表すこととする。なお、便宜上 $N_0 = 0$ と定義する。ポアソン過程の定義は次のように与えられる。

定義7 : Poisson Process

現象の生起間隔 D_1, D_2, \dots が互いに独立で、同一の指数分布 $Ex(\epsilon)$ に従うならば、計数過程 $\{N_t; t \geq 0\}$ はポアソン過程であるという¹⁹。

第4章第1節の議論では、1度限りの企業環境変化が起きるまでの待ち時間 $D_1 (= T_1 - 0)$ が指数分布 $Ex(\epsilon)$ に従うものとして扱う。待ち時間が確率的に決まっているということは、1度限りの企業環境変化が起きる時点が確率的に決まっているということである。前節で議論したように、確率過程は $(\omega \in \Omega, t \in \Lambda)$ の関数となっている。第4章第1節では、企業環境変化が「1度限り」起きるという具合に ω を予め固定して、時間軸上の確率測度として N_t を扱うことになる。この過程がポアソン過程と呼ばれる理由は次の定理により明らかになる

¹⁹伏見正則『確率と確率過程』(1987)第5章参照。

定理 1

任意の時点において、計数過程 $\{N_t; t \geq 0\}$ はポアソン分布する²⁰。

$$i.e. \quad P(N_t = n) = e^{-\epsilon t} \frac{(\epsilon t)^n}{n!}$$

証明

$n = 0$ の場合を考える。 $N_t = 0$ であるということは、 $t < T_1 (= D_1)$ と同値である。 $D_1 (= T_1)$ はパラメータ ϵ の指数分布に従うことが分かっているので、 $t \geq D_1 (= T_1)$ の余事象をとれば $t < T_1 (= D_1)$ の確率が計算できる。

$$\begin{aligned} i.e. \quad P(N_t = 0) &= P(D_1 > t) = 1 - P(D_1 \leq t) \\ &= 1 - \int_0^t \epsilon e^{-\epsilon D_1} dD_1 = 1 + e^{-\epsilon t} - 1 = e^{-\epsilon t} \end{aligned} \quad (3.27)$$

となっている。(3.27) 式の任意の時点 t を固定すると、平均 ϵt のポアソン分布となっていることが確認される。従って、 $n = 0$ のとき、定理 1 は成立する。

$n \geq 1$ の場合を考える。 $N_t = n$ であるということは、 $t < T_n (= D_0 + D_1 + \dots + D_n)$ 、すなわち $t - T_n < D_n$ であることと同値である。 D_1, \dots, D_n は各々パラメータ ϵ の指数分布に従う互いに独立な確率変数であるので、 $T_n (= D_0 + D_1 + \dots + D_n)$ はパラメータ $(\epsilon, 2)$ のガンマ分布に従う (See Appendix 1)。以上より、 $N_t = n$ である確率はやはり同時分布を考えることになる。まず、 $T_n = \tau$ と固定して考えると、 D_n は $Ex(\epsilon)$ に従うので、

$$\begin{aligned} P(D_n > t - \tau | T_n = \tau) &= 1 - P(D_n \leq t - \tau) \\ &= 1 - \int_0^{t-\tau} \epsilon e^{-\epsilon D_n} dD_n = 1 + e^{-\epsilon(t-\tau)} - 1 = e^{-\epsilon(t-\tau)} \end{aligned} \quad (3.28)$$

となる。当然ながら、 $P(D_n > t - \tau | T_n = \tau)$ は τ の関数となっている。従って全確率の公式より、

$$P(N_t = n) = \int_0^t P(D_n \geq t - \tau | T_n = \tau) f(\tau) d\tau \quad (3.29)$$

が成立する。ここで、 $f(\tau)$ は $T_n = \tau$ の確率密度である。 T_n は $G(\epsilon, n)$ に従うので、

$$f(\tau) = \epsilon e^{-\epsilon \tau} \frac{(\epsilon \tau)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (3.30)$$

²⁰伏見正則『確率と確率過程』(1987) 第 5 章参照。

である。(3.28)(3.30) 式を考慮し、(3.29) 式の積分を行うと、

$$\begin{aligned}
 P(N_t = n) &= \int_0^t e^{-\epsilon(t-\tau)} \epsilon e^{-\epsilon} \frac{(\epsilon\tau)^{n-1}}{(n-1)!} d\tau \\
 &= \int_0^t e^{-\epsilon t} \frac{\epsilon^n}{(n-1)!} \tau^{n-1} d\tau \\
 &= \frac{e^{-\epsilon t} \epsilon^n}{(n-1)!} \left[\frac{\tau^n}{n} \right]_0^t = e^{-\epsilon t} \frac{(\epsilon t)^n}{n!}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

を得る。(3.31) 式の任意の t で固定すると、平均 ϵt のポアソン分布であることが確認される。従って、 $n \geq 1$ の場合にも定理 1 が成立することが示された。(証明おわり)

本稿のモデルに応用するにあたり、重要な性質であるマルコフ性をポアソン過程が満たしていることを確認しておく²¹。マルコフ性は、確率過程の文脈において

$$P(N_{t_n} = k_n | N_{t_1} = k_1, \dots, N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) = P(N_{t_n} = k_n | N_{t_{n-1}} = k_{n-1}) \tag{3.32}$$

と表現することができる。ポアソン過程がマルコフ性を満たしていることの証明は、任意の時間間隔 $(t, t+s]$ における増分 $N(t+s) - N(t)$ が互いに独立であることから容易に導かれる²²。増分 $N(t+s) - N(t)$ は平均 ϵs のポアソン分布をしていることから互いに独立になっていることは明らかである。

増分 $N(t+s) - N(t)$ が平均 ϵs のポアソン分布をしていることを簡単に証明しておく。まず、 t が事象の起きた時刻と一致している場合を考える。このとき、時刻 t から始まるポアソン過程を時間 s の間観測することと同じであるので、増分 $N(t+s) - N(t)$ は平均 ϵs のポアソン分布していることが分かる。次に、 t が事象の起きた時刻と一致していない場合について考える。この場合も、指数分布のマルコフ性(無記憶性)により増分 $N(t+s) - N(t)$ は平均 ϵs のポアソン分布していることが分かる(See Appendix 2)。この性質については、逆も成立することが知られている。すなわち、計数過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ が独立増分過程であり、任意の実数 $s, t (> 0)$ について増分 $N(t+s) - N(t)$ が平均 ϵs のポアソン分布をするならば、計数過程 $\{N(t); t \geq 0\}$ は生起率が ϵ のポアソン過程である。

²¹マルコフ(特)性については目的関数に関する議論の中で既に言及した。

²²本稿では証明しない。証明の例は、小和田正『確率過程とその応用』第2章などを参照されたい。

ポアソン過程は、微小期間内における性質により規定されている。微小期間内におけるポアソン過程は次のような性質を有している。

補題 パラメータ ϵ のポアソン過程 $\{N_t\}$ に対し、次の等式が成立している。

$$\textcircled{1} P(N_t \geq 2) = o(t) \quad (t \rightarrow 0) \quad \textcircled{2} P(N_t = 1) = \epsilon t + o(t) \quad (t \rightarrow 0)$$

①の証明

$$P(N_t \geq 2) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\epsilon t)^n}{n!} e^{-\epsilon t} = 1 - \sum_{n=0}^1 \frac{(\epsilon t)^n}{n!} e^{-\epsilon t} = 1 - e^{-\epsilon t}(1 + \epsilon t) \quad (3.33)$$

である。従って、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(N_t \geq 2)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - e^{-\epsilon t}}{t} - \epsilon e^{-\epsilon t} \right) = 0 \quad (3.34)$$

が成立する。(証明おわり)

②の証明

ポアソン過程 $\{N(t)\}$ の増分 $N(t+s) - N(t)$ は、任意の実数 $s, t (> 0)$ について平均 ϵs のポアソン分布をするのであったから、

$$P(N_t = 1) = P(N_t - N_0 = 1) = \epsilon t e^{-\epsilon t} \quad (3.35)$$

であることが分かる。いま、(3.35) 式の両辺から ϵt を差し引くと、

$$P(N_t = 1) - \epsilon t = \epsilon t (e^{-\epsilon t} - 1) \quad (3.36)$$

を得る。従って、

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{P(N_t = 1) - \epsilon t}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \epsilon (e^{-\epsilon t} - 1) = 0 \quad (3.37)$$

が成立する。(証明おわり)

性質①は、微小期間内に事象が2回以上起きることがないことを意味している。従って、微小期間内においてはベルヌーイ施行となっているとすることができる。性質②は、微小期間 t において事象が1回起きる確率が ϵt と等しいこと、そして単位時間にある事象が起きる割合が一定率 $\epsilon (> 0)$ であるということの意味している。この性質から、ポアソン過程がポアソン分布に時間軸を加えたものとなっていることが確認される。

マルコフ過程

ある確率過程 $\{X_t; t \in \Lambda\}$ および $t_1 < t_2$ であるような2つの時刻 $t_1, t_2 (\in \Lambda)$ が与えられたとき、 $t = t_1$ における状態 $X(t_1)$ の実現値のみによって確率変数 $X(t_2)$ の分布が定まり、時刻 $t < t_1$ の歴史には依存していない場合、 $\{X_t; t \in \Lambda\}$ をマルコフ過程という。マルコフ過程 $\{X_t; t \in \Lambda\}$ が与えられたとき、 $X(t)$ のとりうる値(状態)の集合 (S) を状態空間という²³。ここでは、定常なマルコフ過程についてのみ言及する。すなわち、任意に与えられた自然数 i, j, m に対して、条件付確率

$$p_{ij}(t) \equiv P(X(t+m) = j | X(t) = i), \quad i, j \in S (i \neq j), \quad t, m \geq 0 \quad (3.38)$$

が時刻 t に無関係であるものとする。

条件付確率(密度)関数 $p_{ij}(t)$ の行列 $P(t) = \|p_{ij}(t)\|$ をマルコフ過程 $\{X_t; t \in \Lambda\}$ の推移行列と呼ぶ。これは、ある状態から t 時間後に他の状態に推移する確率を与えるものである。推移行列は、次の3つの条件を満たす。

$$(1) p_{ij}(t) \geq 0, \quad (2) \sum_{j \in S} p_{ij}(t) = 1, \quad (3) \sum_{k \in S} p_{ik}(t) p_{kj}(s) = p_{ij}(t+s)$$

3つ目の等式は、連続パラメーターの場合のチャップマン コルモゴロフの等式である。

第4章第2節では、繰り返し起きる企業環境変化のタイミングの不確実性を記述するものとして、2状態マルコフ過程を用いる。状態がHとLの2つしか存在しないので、推移確率行列は2行2列となる。本章第1節でも若干触れたが、状態LからHへの推移確率を ϵ 、状態LからLへの推移確率を ν と置くので、推移確率行列は

$$P = \begin{vmatrix} 1 - \epsilon & \epsilon \\ \nu & 1 - \nu \end{vmatrix} \quad (3.39)$$

と表される。 ϵ または ν の値が0または1になる場合には、吸収状態を持つことになる。

マルコフ過程 $\{X_t; t \in \Lambda\}$ が時刻 t で状態 i にいる場合に、 i 以外の他の状態までの時間の長さ D_t は

$$D_t(\omega) \equiv \inf\{s > 0; X_{t+s}(\omega) \neq X_t(\omega)\}$$

²³状態空間 S は離散でも連続でもありうるが、 S が整数の集合と表される場合、マルコフ・チェーンと呼ぶ。

と定義される。マルコフ過程における D_t については、次の定理が成立している。

定理 2

$i \in S$ と $t \geq 0$ に対して、

$$P(D_t > u | X_t = i) = e^{-\epsilon(i)u}, \quad u \geq 0$$

となる $\epsilon(i) \in [0, +\infty]$ が存在する。ただし $\epsilon(i) = +\infty$ のとき $e^{-\epsilon(i)u} = 0$ と約束する²⁴。

この定理から、各状態の滞在時間の分布が現在の状態 i に依存するパラメータ $\epsilon(i) \in [0, +\infty]$ を持つ指数分布に従うことを示すことができる²⁵。従って、2状態マルコフ過程は第4章第2節において、繰り返し起きる企業環境変化のタイミングに関する不確実性を表現することになるのである。

ところで、先に指摘したように第4章1節で扱うポアソン過程もまたマルコフ過程であった。ポアソン過程で、状態 i から m という時間で状態 j へ推移する条件付確率は $j \geq i$ であるとき、

$$\begin{aligned} p_{ij}(t) &\equiv P(X(t+m) = j | X(t) = i) = P(X(t+m) - X(t) = j - i | X(t) = i) \\ &= P(X(t+m) - X(t) = j - i) = \frac{(\epsilon m)^{j-i}}{(j-i)!} e^{-\epsilon m} \end{aligned} \quad (3.40)$$

と表される。指数分布の無記憶性を利用している²⁶。勿論、 $j < i$ である場合には0である。従って、 $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し、 $p_k(t) = \frac{(\epsilon t)^k}{k!} e^{-\epsilon t}$ と置くと、ポアソン過程の推移確率行列は次のように表されることになる。

$$P(t) = \begin{vmatrix} p_0(t) & p_1(t) & p_2(t) & \dots \\ 0 & p_0(t) & p_1(t) & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

²⁴小和田正『確率過程とその応用』第2章参照。

²⁵定理2の証明と、滞在時間の分布が指数分布に従うことの証明はここでは行わない。より詳しい議論は小和田正『確率過程とその応用』第2章を参照のこと。

²⁶Appendix2を参照。

第3節 企業投資行動の基本モデル

本節では、調整費用関数を用いて企業の資本蓄積行動を定式化する。また、1度限りの企業環境変化を導入し、確実性下における定常均衡や最適経路の性質を明らかにする。これらの議論は、第4章の諸分析の基礎となるものである。

諸設定

個別企業は、資本財を投入して一種類の財を生産する²⁷。議論の単純化のため、一単位の資本投入によって一単位の財を生み出すという、線形技術を想定する²⁸。

$$i.e. \quad Y_t = K_t \quad (3.42)$$

資本ストックの調整は、投資 (I_t) という形で行われるが、資本市場は完全に競争的であり、個別企業はプライステイカーとして行動することを仮定する。ここで、資本財価格を P_I とし、 P_I は時間を通じて一定であるものと仮定する。また、投資に関しては規模に関して逓増的であるような内部調整費用 $C(I_t)$ が発生するものとする。これは、資材の購入・配送・設置などに伴う費用にあたる。突然の変化が生じたときに、その変化に対応した資本ストックの最適な水準が瞬時的に達成されるという想定は現実的なものではないからである。因みに、企業が仮に各期において資本ストックを瞬時的に費用をかけることなく調整出来るならば、不確実性は企業の投資政策に対して全く影響を与えない。ここでは、投資の調整費用関数が2次関数になるものとし、次のように定義する。

$$C(I_t) = \frac{c}{2} I_t^2, \quad c > 0 \quad (3.43)$$

企業は右下がりの需要曲線に直面するものと仮定する。需要曲線の形状は時を通じて一定であり、企業はその情報を完全に把握しているものとする。

$$\hat{z}x(P_t) = Y_t, \quad \hat{z} \gg 0, \quad \forall t \quad (3.44)$$

²⁷本稿の目的は、不確実性が動学的設備投資行動に対する影響を分析することである。労働が各時点において静学的に決定されるものと想定すると、労働を考慮することは議論の本質とはならないのである。

²⁸Leontief型生産技術の特殊ケースとして考えることもできる。

ここで P_t は生産物価格、 Y_t は生産量である。 \hat{z} は需要曲線の位置に関するパラメータである²⁹。いま、需要関数は単調かつ連続であると仮定すると、逆需要関数が存在し、(3.44) 式から次のような逆需要関数を導出することができる。

$$P_t = x^{-1}(Y_t/\hat{z}) \equiv F(Y_t/\hat{z}) \quad (3.45)$$

定義された逆需要関数は明らかに次の性質を有している。

$$F_Y < 0 \quad , \quad F_{\hat{z}} > 0 \quad (3.46)$$

ただし、 F_Y および $F_{\hat{z}}$ はそれぞれ、 Y 、 \hat{z} に関する偏微導関数である。ここで、議論の簡単化のため、逆需要関数を次のように特定化する。

$$F(Y_t/\hat{z}) \equiv \hat{z} - \frac{b}{2}Y_t \quad (3.47)$$

企業の最適化行動

以上の諸設定により、 t 期における企業の利潤は次のように示される。

$$\pi = zK_t - \frac{b}{2}K_t^2 - \frac{c}{2}I_t^2 \quad (3.48)$$

ただし、 $z \equiv \hat{z} - P_t (> 0)$ としている。理論上、企業の計画期間は $[0, \infty)$ である。ここで、全計画期間にわたる利潤合計を最大にすることが企業の目的であると考え、(3.48) 式から、企業の問題は次のように記述される。

$$\max \int_0^{\infty} e^{-rt} \{zK_t - \frac{b}{2}K_t^2 - \frac{c}{2}I_t^2\} dt \quad (3.49)$$

$$s.t. \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (0 < \delta < 1) \quad , \quad K_0 : given \quad (3.50)$$

ここで、利子率 (r) は一定であるとする。

(3.49) 式は、状態変数 K_t に関する遷移式である。当期価値ハミルトン関数は、次のように設定される。

$$\mathcal{H}_t = zK_t - \frac{b}{2}K_t^2 - \frac{c}{2}I_t^2 + q_t(I_t - \delta K_t) \quad (3.51)$$

²⁹この想定によって、時間に伴う需要の成長は捨象することとなる。

ここから得られる最適化のための一階の条件は次のとおりである。

$$cI_t = q_t \quad (3.52)$$

$$\dot{q}_t = (r + \delta)q_t - z + bK_t \quad (3.53)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (3.54)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} q_t K_t = 0 \quad (3.55)$$

(3.52) 式は、投資の限界収益の割引現在価値と投資の限界的費用とが等しくなるべきであることを示している。(3.53) 式は資本を 1 単位増やした場合の限界収益とキャピタルゲイン (\dot{q}_t) との合計が、限界的費用と一致しなければならないという、1 種の裁定条件となっている。(3.54) 式は資本の蓄積方程式であり、(3.55) 式は横断性条件 (TVC) となっている。

一階の条件から、問題は以下の I_t と K_t に関する連立微分方程式体系に集約することができる。

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_t \\ \dot{K}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + \delta & \frac{b}{c} \\ 1 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t \\ K_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{z}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

ここで、係数行列を A とおくと、 A のトレース ($trace A$) と行列式 ($det A$) について

$$trace A = r + \delta - \delta = r > 0 \quad (3.57)$$

$$det A = -\delta(r + \delta) - \frac{b}{c} < 0 \quad (3.58)$$

が成立している。このことは、システムの均衡が条件付安定性 (saddle stable) を満たしていることを意味している。 $\dot{I}_t = 0$ 線と $\dot{K}_t = 0$ 線は、次の通りである。

$$I_t = -\frac{b}{c(r + \delta)} K_t + \frac{z}{c(r + \delta)} \quad (3.59)$$

$$I_t = \delta K_t \quad (3.60)$$

(3.59)(3.60) 式より、 $\dot{I}_t = 0$ 線が右下がりの、 $\dot{K}_t = 0$ 線が右上がりの直線となっていることは明らかである。また、(3.56) 式より、 $\dot{I}_t = 0$ 線の右側では $\dot{I}_t > 0$ であること、 $\dot{I}_t = 0$ 線の左側では $\dot{I}_t < 0$ であることが分かる。また、 $\dot{K}_t = 0$ 線の上側では $\dot{K}_t < 0$ であること、 $\dot{K}_t = 0$ 線の下側では $\dot{K}_t > 0$ であることも分かる。付録 2 は $\dot{I}_t = 0$ 線および $\dot{K}_t = 0$ 線を描いた位相図である。 $\dot{I}_t = \dot{K}_t = 0$ を満たす点は定常均衡

である(付録2のE点)。均衡が条件付安定となっていることは、位相図からも明らかである。付録2に描かれた $S - S$ 線は、サドル・パス(saddle path)である。

定常均衡における資本ストックと投資の水準 (I^*, K^*) は、以下の通りである。

$$(I^*, K^*) = \left(\frac{\delta z}{\delta c(r + \delta) + b}, \frac{z}{\delta c(r + \delta) + b} \right) \quad (3.61)$$

定常均衡 $E(I^*, K^*)$ についての比較静学分析から、次のようなことが明らかである。

- ・ 需要曲線の上方シフト (z の上昇) に対し、 I^* 、 K^* は共に上昇する。
- ・ 調整費用 (c) の増大に対し、 I^* 、 K^* は共に下落する。
- ・ 利子率 (r) の高まりに対し、 I^* 、 K^* は共に下落する。
- ・ 需要曲線の傾きの絶対値 (b) が高まると、 I^* 、 K^* は共に下落する。
- ・ 減耗率 (δ) の上昇に対し、 I^* は下落する一方で K^* は上昇する。

確実なタイミングの状態変化の導入

以下では、基本モデルに1度限りの企業環境変化 (switch) を導入する。ここでは、「企業環境」の1つとして企業のおかれている市況、すなわち需要の状態を扱うこととする。従って、企業環境の変化は需要曲線のシフトパラメータ (z) の変化として表現される。企業は企業環境に対して影響を与えることはできず、その変化は完全に外生的に与えられるものとする。

2つの状態 H、L を想定する。いま、初期時点における状態を L とし、時点 T において状態が H へと移行するものとする。従って、各時点における企業の利潤は

$$\pi = \begin{cases} z_L K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 & (t < T) \\ z_H K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 & (t \geq T) \end{cases} \quad (3.62)$$

と表される。ただし、 $(z_L < z_H)$ である。

企業環境変化は1度限りであるので、 $t \geq T$ における企業の問題は、 $t \geq T$ において実現可能な最大の価値 $V_H(K_T, T)$ を達成することである。すなわち、

$$V_H(K_T, T) \equiv \max_I \int_T^\infty e^{-rt} \left\{ z_H K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 \right\} dt \quad (3.63)$$

s.t. $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$

である。(3.63)式を用いると、全計画期間についての企業の問題は次のように表すことができる。

$$V(K_0, t) \equiv \max_I \int_0^T e^{-rt} \{z_L K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2\} dt + V_H(K_T, T) \quad (3.64)$$

s.t. $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$, $K_0 : \text{given}$

まず、企業環境変化前 ($t < T$) における問題について考える。当期価値のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H}_{L,t} = z_L K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 + q_t (I_t - \delta K_t) \quad (3.65)$$

である。最適化のための一階の条件は以下の通りである。

$$cI_t = q_t \quad (3.66)$$

$$\dot{q}_t = (r + \delta)q_t - z_L + bK_t \quad (3.67)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (3.68)$$

$$q_T = V'_H(K_T, T) \quad (3.69)$$

(3.69)式は、境界条件 (Terminal Condition) である。これらの一階の条件により、 $t < T$ における企業の問題は、次のような連立微分方程式体系に集約される。

$$\begin{bmatrix} \dot{I}_t \\ \dot{K}_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r + \delta & \frac{b}{c} \\ 1 & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_t \\ K_t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{z_L}{c} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

システムの定常均衡は条件付安定 (saddle stable) である。(3.70)を基に、企業環境変化前 ($t < T$) における定常均衡を求める。 $\dot{I}_t = 0$ 線と $\dot{K}_t = 0$ 線は、

$$I_t = -\frac{b}{c(r + \delta)} K_t + \frac{z_L}{c(r + \delta)} \quad (3.71)$$

$$I_t = \delta K_t \quad (3.72)$$

であり、定常均衡 E_L における (I_L^*, K_L^*) は次の通りである。

$$(I_L^*, K_L^*) = \left(\frac{\delta z_L}{\delta c(r + \delta) + b}, \frac{z_L}{\delta c(r + \delta) + b} \right) \quad (3.73)$$

次に、企業環境変化後 ($t \geq T$) について考える。当期価値ハミルトニアンは

$$\mathcal{H}_{H,t} = z_H K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 + q_t (I_t - \delta K_t) \quad (3.74)$$

であり、ここから得られる一階の条件は次の通りである。

$$cI_t = q_t \quad (3.75)$$

$$\dot{q}_t = (r + \delta)q_t - z_H + bK_t \quad (3.76)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (3.77)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} q_t K_t = 0 \quad (3.78)$$

(3.78) 式は、横断性条件 (Transversality Condition) である。これらの一階の条件により、企業環境変化前 ($t < T$) における問題と同様の方法により、企業環境変化後 ($t \geq T$) におけるサドル安定的な定常均衡 E_H を導くことができる。定常均衡 E_H における (I_H^*, K_H^*) は次の通りである。

$$(I_H^*, K_H^*) = \left(\frac{\delta z_H}{\delta c(r + \delta) + b}, \frac{z_H}{\delta c(r + \delta) + b} \right) \quad (3.79)$$

(3.73)(3.79) 式より、政策変更前後における定常均衡について、

$$I_L^* < I_H^* , \quad K_L^* < K_H^* \quad (3.80)$$

という関係が成立していることが分かる。

以上より、位相図は付録3のようになる。企業環境変化前 ($t < T$) と変化後 ($t \geq T$) におけるサドル・パスはそれぞれ $S_L - S_L$ 線、 $S_H - S_H$ 線で示されている。企業はゼロ時点において、「時点 T に状態が L から H へとスイッチする」ということを既に知っている。従って、合理的企業は時点 T に丁度 $S_H - S_H$ 線に到達するように初期における投資水準を制御するのである。付録3では2つの状態における位相図を重ねて描いているが、時点 T までは状態 L のシステムが成立しているということに注意されたい。

おわりに

本章では、第4章で行う理論分析に関する数学的基礎を提供した。第1節では動学的問題を扱う手法の1つである動的計画法について解説を行った。動的計画法は、不確実性を加味した動学的問題を扱う場合には特に、有用性を発揮する手法であるから

だ。また、本稿で扱う問題のように目的関数のシフトを考慮する場合には、動的計画法を使うことが必要であるからである。第2節では、タイミングの不確実性の数学的記述に関する議論を行った。確率論の基礎的概念を概説した後に、モデルに活用されているポアソン過程と2状態マルコフ過程について議論した。モデルに活用する上で重要な含意を持つ定理については証明も行った。第3節では、内部調整費用を反映させる調整費用関数を用いて、企業の資本蓄積行動の定式化を行った。また、確実性の枠組みにおいて1度限りの状態変化を導入し、企業行動を分析した。ここでの議論は、本稿の基礎となっている。

Appendix 1

「同一の指数分布 $Ex(\epsilon)$ に従う、互いに独立な確率変数 D_1, \dots, D_n の和 $T_n = D_1 + \dots + D_n$ は $G(\epsilon, 2)$ に従う。」ことを証明する。 T_n の密度関数を求める。 T_n の積率母関数 $M(\theta)$ は、

$$\begin{aligned} M(\theta) &= E(e^{T_n\theta}) = E(e^{(D_1+\dots+D_n)\theta}) \\ &= E(e^{(D_1)\theta}) \dots E(e^{(D_n)\theta}) = \left(\frac{\epsilon}{\epsilon - \theta}\right)^n \end{aligned} \quad (3.81)$$

である。これは、パラメーター (ϵ, n) であるガンマ分布の積率母関数に一致する。よって、 $T_n \sim G(\epsilon, 2)$ となる。従って、 T_n の密度関数は

$$f(T_n) = \epsilon e^{-\epsilon T_n} \frac{(\epsilon T_n)^{n-1}}{(n-1)!} \quad (3.82)$$

となる。ただし、 $T_n \geq 0$ 、 $\epsilon > 0$ である。(証明おわり)

< 別証明 >

互いに独立である確率変数 D_1, \dots, D_n は同一の指数分布 $Ex(\epsilon)$ に従う。すなわち、

$$f(D_1) = \dots = f(D_n) = \begin{cases} \epsilon e^{-\epsilon D} & (D \geq 0) \\ 0 & (D < 0) \end{cases} \quad (3.83)$$

であるから、 $T_n (= D_1 + \dots + D_n) < 0$ ならば $f(T_n) = 0$ であり、 $D \geq 0$ ならば

$$f(T_n) = \int_0^{T_n} \epsilon e^{-\epsilon(T_n-D)} \epsilon e^{-\epsilon D} dD = \epsilon^2 e^{-\epsilon T_n} \int_0^{T_n} dD = \epsilon^2 T_n e^{-\epsilon T_n} \quad (3.84)$$

となる。これは、ガンマ分布 $G(\epsilon, 2)$ の密度関数である。(証明おわり)

Appendix 2

指数分布のマルコフ性の証明を行う。

$$i.e. P(D > x + y | D > x) = P(D > y) \quad (3.85)$$

条件付確率に関する公式より、 $P(D > x + y | D > x)$ は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} P(D > x + y | D > x) &= P(D > x + y, D > x) / P(D > x) \\ &= P(D > x + y) / P(D > x) = e^{-\epsilon(x+y)} / e^{-\epsilon x} = e^{-\epsilon y} \end{aligned} \quad (3.86)$$

以上、指数分布のマルコフ性が示された。(証明おわり)

第4章 タイミングの不確実性と企業投資行動

はじめに

第3章では企業の設備投資問題とタイミングの不確実性とを定式化し、問題を解くために必要となる動的計画法について説明した。本章では、それらを用いて具体的にモデル分析を行うこととする。本章における2つの大きな柱は、「タイミングの不確実性」と確率変数に関する「主観的分布と客観的分布の乖離」である。後者は、経済主体が不確実性の構造を正確に把握しているとは限らないという問題である。政府や研究機関などで様々な手法による経済予測が行われているが、「平均的に」さえ当たっているとは言い難い。この事実は、真に存在する確率構造と経済主体が信じている確率構造とが異なっている可能性を示唆している。

設備投資に関する研究の多くは、需要水準や要素費用水準に関する不確実性に焦点を当てたものである。しかし、企業の関心事は必ずしも水準に関することばかりではない。企業が設備投資を決定する際には、将来における企業環境に加え、企業環境の変化のタイミングが重要となる。例えば、売上が増大する企業環境となることが分かっているとしても、その実現のタイミングが設備投資の決定には重要となるのである。企業環境変化のタイミングの不確実性は、企業環境に大きな影響を及ぼす景気循環の周期が確率的なものであるという事実からも裏付けられている¹。

第1節では、1度限りの企業環境変化が起きる場合を想定し、タイミングの不確実性を考慮した厳密解を求め、その影響を解析的に分析する。ポアソン過程を用いてタイミングの不確実性を記述している。問題への接近法としては、労働問題を取り扱って

¹本稿第2章参照。

いる Shapiro-Stiglitz(1984)²、枯渇資源の問題を取り扱う Dasgupta-Stiglitz(1981)³などを参考としている。第2節では、繰り返し起きる企業環境変化を導入し、投資の非可逆性を明示的に考慮するという点で第1節のモデルを拡張し、分析している。繰り返し起きる企業環境変化のタイミングの不確実性は、2状態マルコフ過程により表現している。問題の接近法は、労働問題を扱う Saint-Paul(1996)⁴を参考としている。第3節では、タイミングに関する主観的分布と客観的分布とが異なっている場合の企業行動を、数値計算を用いて分析する。これまでの節では、企業環境変化の起こり方が従う確率過程について、個別企業が正確に把握しているという仮定の下で議論を展開した。本節では、スイッチが起きるまでの待ち時間について、企業が信じている確率分布（主観的確率分布）が真の確率分布（客観的確率分布）から乖離している場合について議論する。

第1節 1度限りの企業環境変化と投資行動（ポアソン過程）

不確実なタイミングの状態変化を考慮した資本蓄積行動

本節では、1度限りの企業環境変化のタイミングが不確実である場合について考える。モデルの諸設定は第3章第3節に従う。いま、企業環境変化が起きるまでの待ち時間が指数分布に従うことを仮定する。 $\Pi_t \equiv \epsilon e^{-\epsilon t}$ であることに注意すると、企業の

²Shapiro-Stiglitz(1984) は、効率賃金仮説を代表とするモデルの1つである。労働者の怠業が発覚する確率を所与として、労働者が自発的に勤勉に働くだけの賃金を内生的に決定する問題を扱っている。

³Dasgupta-Stiglitz(1981) は、枯渇資源に対して完全に代替的な新技術が発明されるタイミングが不確実であるという設定の下、企業の枯渇資源消費行動を分析したものである。需要が価格に対してある程度弾力的であるとき、枯渇資源のストックが少ない場合については早々に枯渇させてしまう方向に、ストックが多い場合には保蔵する方向に不確実性の影響が現れることを示した。

⁴Saint-Paul(1996) は、調整費用の有無によって労働を2種類に分類し、個別企業の状態が2状態マルコフ過程に従っている場合の労働需要を分析している。

価値関数は次のように定義することができる。

$$V(K_0, t_0) \equiv \max_I \int_0^{\infty} \{e^{-(r+\epsilon)t} \pi_L(I_t, K_t) + \epsilon e^{-\epsilon t} V_H(K_t, t)\} dt \quad (4.1)$$

$$s.t. \quad \dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad , \quad K_0 : given$$

ここで、

$$V_H(K_t, t) \equiv e^{-rt} J_H(K_t) \quad (4.2)$$

となるような $J_H(K_t)$ を定義すると、当期価値ハミルトニアンは次のように設定される。

$$\mathcal{H}_t = e^{-\epsilon t} \{ \pi_L(I_t, K_t) + \epsilon J_H(K_t) \} + q_t \{ I_t - \delta K_t \} \quad (4.3)$$

最適化のための一階の条件は以下の通りである。

$$cI_t = e^{\epsilon t} q_t \quad (4.4)$$

$$e^{\epsilon t} \dot{q}_t = (r + \delta) e^{\epsilon t} q_t + bK_t - \epsilon J'_H(K_t) - z_L \quad (4.5)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (4.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-rt} q_t K_t = 0 \quad (4.7)$$

ここで、次のような ν_t を定義する。

$$\nu_t \equiv e^{\epsilon t} q_t \quad (4.8)$$

いま、 ν_t を用いて変数変換を行うと、(4.4)(4.5) 式は

$$cI_t = \nu_t \quad (4.9)$$

$$\dot{\nu}_t = (r + \delta + \epsilon) \nu_t + bK_t - \epsilon J'_H(K_t) - z_L \quad (4.10)$$

となる。以上より、タイミングの不確実性下における企業の問題は、次のような I_t と K_t についての連立微分方程式体系に集約される。

$$\dot{I}_t = (r + \delta + \epsilon) I_t + \frac{b}{c} K_t - \frac{\epsilon}{c} J'_H(K_t) - \frac{z_L}{c} \quad (4.11)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (4.12)$$

(4.11) (4.12) 式を基に、定常均衡 E_U を求める。 $\dot{I}_t = 0$ 線と $\dot{K}_t = 0$ 線は、

$$I_t = -\frac{b}{c(r + \delta + \epsilon)}K_t + \frac{\epsilon}{c(r + \delta + \epsilon)}J'_H(K_t) + \frac{z_L}{c(r + \delta + \epsilon)} \quad (4.13)$$

$$I_t = \delta K_t \quad (4.14)$$

である。ここで、(4.13) には未知関数 $J'_H(K_t)$ が含まれていることに注意されたい。定常解やシステムの安定性についての十分な情報を得るために、この未知関数 $J'_H(K_t)$ を求める必要がある。以下では状態 H に注目し、未定係数法を適応して未知関数を求める。状態変化が 1 度限りであるため、状態 H における問題に不確実性は存在しない。未知関数 $J'_H(K_t)$ を求めることは可能である。

状態 H ($\tau \geq t$) における企業の問題は次の通りであった。

$$V_H(K_t, t) \equiv \max_I \int_t^\infty e^{-r\tau} \pi_H(I_\tau, K_\tau) d\tau \quad (4.15)$$

s.t. $\dot{K}_t = I_t - \delta K_t$

従って、ハミルトン-ヤコビ-ベルマン方程式

$$-V_{H,t} = \max \left\{ e^{-rt} \left(z_H K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - \frac{c}{2} I_t^2 \right) + V_{H,K} (I_t - \delta K_t) \right\} \quad (4.16)$$

を得る。また、一階の条件は

$$e^{-rt} c I_t = V_{H,K} \quad (4.17)$$

である。さて、 $V_{H,K} = e^{-rt} J'_H(K_t)$ 、 $V_{H,t} = -r e^{-rt} J_H(K_t)$ であるから、(4.16) 式を次のように書き直すことができる。

$$r J_H(K_t) = z_H K_t - \frac{b}{2} K_t^2 + \frac{J'_H(K_t)^2}{2c} - \delta K_t J'_H(K_t) \quad (4.18)$$

いま、 $J(K_t)$ の関数形について、次のように推測 (Guess) する⁵。

$$J(K_t) = A K_t^2 + B K_t + D \quad (4.19)$$

⁵一般に、動的計画法によって厳密解を求めることは困難であり、しばしば数値計算によって対処されている。しかし、本稿のモデルのように、目的関数が 2 次関数となっている場合には、価値関数の形状も 2 次関数となっていることが知られており、厳密解を求めることができる。

ここで、 A, B, D は未定係数である。(4.19) 式を考慮した(4.18) 式において係数比較を行うことにより、

$$4A^2 - 2c(r + 2\delta)A - bc = 0 \quad (4.20)$$

$$(4A - 2\delta c - 2cr)B + 2cz_H = 0 \quad (4.21)$$

$$B^2 - 2crD = 0 \quad (4.22)$$

を得る。(4.20)(4.20)、および(4.22) 式より、未定係数 A, B, D の値を得る。

$$A = \frac{c(r + 2\delta) - \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc}}{4} < 0 \quad (4.23)$$

$$B = \frac{2cz_H}{cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc}} > 0 \quad (4.24)$$

$$D = \frac{2c^2 z_H^2}{cr \left(cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right)^2} > 0 \quad (4.25)$$

従って、 $J'(K_t)$ は次のようになる。

$$J'(K_t) = \frac{c(r + 2\delta) - \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc}}{2} K_t + \frac{2cz_H}{cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc}} \quad (4.26)$$

(4.26) 式が与えられたので、連立微分方程式(4.13) (4.14) 式は

$$\dot{I}_t = (r + \delta + \epsilon)I_t + \frac{b - 2\epsilon A}{c} K_t - \frac{z_L + \epsilon B}{c} \quad (4.27)$$

$$\dot{K}_t = I_t - \delta K_t \quad (4.28)$$

となる。なお、(4.27) 式における A, B はそれぞれ(4.23)(4.24) 式に従う。ここで、係数行列を A とおくと、 A についてのトレース ($trace A$) と行列式 ($det A$) について

$$trace A = r + \delta + \epsilon - \delta = r + \epsilon > 0 \quad (4.29)$$

$$det A = -\delta c(r + \delta + \epsilon) - b + \frac{\epsilon \left[c(r + 2\delta) - \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]}{2c} < 0 \quad (4.30)$$

が成立している。このことは、不確実性下においてもシステムの均衡が条件付安定性 (saddle stable) を満たしていることを意味している。

$\dot{I}_t = 0$ 線と $\dot{K}_t = 0$ 線は次のように与えられる。

$$I_t = \frac{-2b + \epsilon \left[c(r + 2\delta) - \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]}{2c(r + \delta + \epsilon)} K_t + \frac{2\epsilon cz_H + \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L}{c(r + \delta + \epsilon) \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]} \quad (4.31)$$

$$I_t = \delta K_t \quad (4.32)$$

(4.31) (4.32) 式より、 $\dot{I}_t = 0$ 線は右下がりの、 $\dot{K}_t = 0$ 線は右上がりの直線となっていることが分かる。また、(4.27) 式より、 $\dot{I}_t = 0$ 線の右側では $\dot{I}_t > 0$ であること、 $\dot{I}_t = 0$ 線の左側では $\dot{I}_t < 0$ であることが分かる。また、(4.28) 式より、 $\dot{K}_t = 0$ 線の上側では $\dot{K}_t < 0$ であること、 $\dot{K}_t = 0$ 線の下側では $\dot{K}_t > 0$ であることも分かる。 $\dot{I}_t = \dot{K}_t = 0$ を満たす点は定常均衡である。

定常均衡 E_U における (I_U^*, K_U^*) は次のとおりである。

$$I_U^* = \frac{2\delta\epsilon cz_H + \delta \left[cr + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L}{\left[c(r+2\epsilon) + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] [b + \delta c(r + \delta)]} \quad (4.33)$$

$$K_U^* = \frac{2\epsilon cz_H + \left[cr + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L}{\left[c(r+2\epsilon) + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] [b + \delta c(r + \delta)]} \quad (4.34)$$

タイミングの不確実性が投資に与える動学的影響

状態が L から H へと移行するタイミングが不確実である場合、合理的企業は不確実性を考慮し、事前的にコストとベネフィットとがバランスするように行動する。均衡 E_U に存在する不確実性の影響は、次の2つの命題にまとめられる。

命題1 $K_L^* < K_U^* < K_H^*$ が成立する。

命題2 生起確率 (ϵ) の増大とともに、 K_U^* は増大する。

以下、各定常均衡における資本ストックの水準に着目し、命題を証明する。定常均衡における投資水準は、資本ストックと減耗率 (δ) との積になっており、資本ストックを分析することにより投資水準についても考察することが可能であるからである。

命題1の証明

まず、 K_U^* と K_H^* との大小関係を調べる。第3章第3節の議論と (4.34) 式より

$$\begin{aligned} K_H^* - K_U^* &= \frac{z_H}{\delta c(r + \delta) + b} - \frac{2\epsilon cz_H + \left[cr + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L}{\left[c(r+2\epsilon) + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] [b + \delta c(r + \delta)]} \\ &= \frac{\left[cr + \sqrt{c^2(r+2\delta)^2 + 4bc} \right] (z_H - z_L)}{[\delta c(r + 2\epsilon) + b] \left[c(r + 2\epsilon) + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]} > 0 \end{aligned} \quad (4.35)$$

(4.35) 式は、設定 $z_H > z_L$ から必ず正となる。従って、 $K_U^* < K_H^*$ が成立する。

同様にして、 K_U^* と K_L^* との大小関係を調べる。

$$\begin{aligned} K_L^* - K_U^* &= \frac{z_L}{\delta c(r + \delta) + b} - \frac{2\epsilon c z_H + \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L}{\left[c(r + 2\epsilon) + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] [b + \delta c(r + \delta)]} \\ &= \frac{4\epsilon c(z_L - z_H)}{[\delta c(r + 2\epsilon) + b] \left[c(r + 2\epsilon) + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]} < 0 \end{aligned} \quad (4.36)$$

(4.36) 式は、設定 $z_H > z_L$ から必ず負となる。従って、 $K_U^* > K_L^*$ が成立する。

以上より、命題 1 ($K_L^* < K_U^* < K_H^*$) は証明された。(証明おわり)

命題 2 の証明

命題 2 は、 ϵ に関する K_U^* の偏微導関数が正であるならば成立していると言うことができる。(4.34) 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_U^*}{\partial \epsilon} &= \frac{2cz_H \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] - 2c \left\{ 2\epsilon c z_H + \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] z_L \right\}}{\left[c(r + 2\epsilon) + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]^2 [b + \delta c(r + \delta)]} \\ &= \frac{2c \left[cr + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right] (z_H - z_L)}{\left[c(r + 2\epsilon) + \sqrt{c^2(r + 2\delta)^2 + 4bc} \right]^2 [b + \delta c(r + \delta)]} > 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

(4.37) 式は、 $z_H > z_L$ という設定から必ず正值をとる。すなわち、 K_U^* は ϵ の増大に伴って厳密に増加するということが明らかとなった。命題 2 が証明された。(証明おわり)

命題のメカニズムとインプリケーション

命題 1 は、合理的企業が企業環境変化までの平均的待ち時間 $1/\epsilon$ を考慮していることから得られる。このことは、最適資本水準の決定式

$$\hat{z}_L - bK_U^* - \{c\delta(r + \delta + \epsilon) - 2\epsilon A\}K_U^* + \epsilon B = P_I \quad (4.38)$$

から明らかである。 $A(< 0)$ 、 $B(> 0)$ はそれぞれ (4.23) (4.24) 式に従う。企業の事前的最適化行動、すなわち、不確実性(確率)で限界的資本の割引現在価値を評価し、動学的限界期待収益(DMR)と限界費用(MC)とが一致するように最適資本ストック量を決定することがメカニズムとなっているのである。

命題2からは、「企業環境変化までの待ち時間が短いほど投資を増大させる」ということが言える。この命題のメカニズムは、企業環境変化までの待ち時間が短縮が資本の動学的限界期待収益を高めることである。待ち時間の分散は $1/\epsilon^2$ であることから、待ち時間の短縮は待ち時間に関する不確実性が低下であるとも言える。状態 H へのスイッチがより近未来に、より確実に起きるならば、資本の限界的価値が高まり、投資が促進されるのである。

一方、待ち時間の短縮は投資に対する企業態度を慎重化させる効果も持つ。いま、不確実性下における最適資本の動学的限界収入弾力性 η を計算すると、次のようになる。

$$\eta \equiv -\frac{dK_U^*}{K_U^*} \bigg/ \frac{dDMR}{DMR} = \frac{1}{b + c\delta(r + \delta + \epsilon) - 2\epsilon A} \cdot \frac{DMR}{K_U^*} \quad (4.39)$$

$A < 0$ であることから、 ϵ の増大が必ず $\partial K_U^* / \partial DMR$ を減少させることになる。すなわち、任意の動学的限界収入 (DMR)-資本 (K_U^*) 比率に対し、 η が小さくなるのである。これは、 ϵ の増大は期待収益を高める一方で、期待調整費用 (資本のシャドー・コスト) をも高めるということに由来する。以上より、「状態の推移確率の高まりは、企業の投資行動を抑制する」と言うことが出来る。

日本経済への含意

本節のモデルは、1度限りの企業環境変化を扱うため、直接現実経済に応用することは難しい。しかし、近似的に議論することができる経済問題は存在する。例えば、為替レートが切り下(上)がることが分かっているにもかかわらず、その切り下(上)げがいつ起きるかが分からない場合における企業問題である。また、長期不況下において適切な経済健全化政策の実現するタイミングが不確実である場合についても一定程度議論することができよう。ここでは、後者について若干議論する。

90年代の日本経済を概観すると、経済に対して適切な効果をもたらす政策はなく、政府に対する信頼は低下してきたと考えられる。不良債権処理が叫ばれる一方で貸し渋り・貸し剥がしが問題となり、不祥事や上場企業の倒産も相次いでいる。そして、消費や投資も力強い回復を見せないまま、デフレが進行している。従って、適切な政策で好景気の実現するまでの待ち時間は、十分に長いということが予想される。すな

わち、景気回復が近い未来には起こらないものとして個々の企業が行動していることが考えられるのである。

個別企業が景気の好転に関するタイミングが極めて不確実であると考えている場合、合理的経済主体は十分 1 に近いウェイトで不景気の現状を評価するため、投資水準は一向に上向かないということになる。この近似的議論によると、日本経済を立ち直らせるためには、確実に効果が上がる経済政策を立ち上げ、かつ、それを経済主体に確信させることが必要である。個別企業は、景気好転がより早期に実現するという事に確信度を高めるほど、積極的に投資を行うようになるからである。

第 2 節 無限回の企業環境変化と投資行動（マルコフ過程）

不確実なタイミングの状態変化を考慮した資本蓄積行動

本節では、前節のモデルを次の 2 点において拡張する。1 つは、前節のモデルでは一度限りであった企業環境変化が無限回起きるケースを扱う点である。本節では、個別企業は状態 H か状態 L かのいずれかの状態にあり、その状態は 2 状態マルコフ過程に支配されているものとする。状態 L から状態 H へとスイッチする瞬間確率を ϵ 、状態 H から状態 L へとスイッチする瞬間確率を ν と与える⁶。もう 1 つは、「投資の非可逆性」を明示的に扱う点である。投資の非可逆性とは、設備の流通市場が不備であることや設備の解除費用が高いなどの理由から、一度投資してしまった設備を解除し難いということを反映する設定である。この枠組みは、労働市場分析における Saint-Paul のモデルを応用したものである。このような 2 つの拡張により、現実の投資行動をより良く描写することができる。

任意の時点 t における当期利潤 π_t は、次のように表される。

$$\begin{aligned}\pi_t &= P_t F(K_t) - C(I_t) \\ &= z_i K_t - \frac{b}{2} K_t^2 - C(I_t) \quad (i = H, L; z_H > z_L)\end{aligned}\tag{4.40}$$

ただし、負の投資に関する費用は、正の投資を行う場合のそれに比べて十分大きなも

⁶企業環境変化が一度限りであった場合と同様、各生起間隔は指数分布に従うことになる。

のであると考えられるので（非可逆性）投資に関する調整費用関数は

$$C(I_t) = \begin{cases} 0 & (I_t > 0) \\ \frac{c}{2} I_t^2 dt & (I_t \leq 0) \end{cases}, \quad c > 0 \quad (4.41)$$

と想定する。企業は計画期間 $[0, \infty)$ における利潤の現在割引価値合計を最大化することを目的とする。

ここで、状態 H と状態 L における価値関数を定義する。状態 L における企業の価値関数 $V_L(K_t)$ は、次のように与えられる。

$$V_L(K) \equiv \max_I \left\{ (z_L K' - \frac{b}{2} K'^2) dt - C(I) \right. \\ \left. + (1 - rdt)[V_L(K')(1 - \epsilon dt) + \epsilon dt V_H(K')] \right\} \quad (4.42)$$

$$s.t. \quad K' = K + \dot{K} dt, \quad \dot{K} = I \quad (4.43)$$

(4.43) 式から分かるように、本節では資本の減耗率 (δ) を 0 として考えている。(4.42) 式の右辺第 1 項は、 K' を達成した場合に t 時点から $t + dt$ 時点までの間に生み出される企業の収入である。第 2 項は、資本ストック量を K から K' へと変更した場合に企業が支払わねばならない調整費用である。(4.41) 式で与えられているように、 $K' - K$ は微小分 $\dot{K} dt$ であるから、 $C(I)$ は微小である。右辺の最後の項は、企業の期待価値を現在に割り引いたものに対する将来の貢献分である。時点 $t + dt$ において、企業は確率 $(1 - \epsilon dt)$ で状態 L にとどまっている。定義より、この場合の割引現在価値は $V_L(K')$ となる。一方、企業は ϵdt の確率で、状態 H へとスイッチしてしまっている。これら 2 つの要素の加重平均は、

$$1 - rdt \cong e^{-rdt} \quad (4.44)$$

という、時点 t から時点 $t + dt$ までの間の割引ファクターによって割り引かれる。

同様の考え方に基づいて、状態 H における価値関数 $V_H(K)$ は、

$$V_H(K) \equiv \max_I \left\{ (z_H K' - \frac{b}{2} K'^2) dt - C(I) \right. \\ \left. + (1 - rdt)[V_H(K')(1 - \nu dt) + \nu dt V_L(K')] \right\} \quad (4.45)$$

と定義することができる。ただし、正の投資には調整費用が発生しないので、(4.45) 式については $C(I) = 0$ となることに注意されたい。この設定から、状態 L から状態

H へのスイッチが生じた場合には、企業は資本を最適な水準にまで必ずジャンプさせるということが分かる。スイッチ前における資本ストックの水準 (K) は、資本ストックが K_H^* にまで増加した場合の割引現在価値に対して、影響を与えないことになる。従って、状態 H へのスイッチはそれ以前の資本ストックの水準 K_t からは独立に、常に V_H という価値を生み出すことになる。

以下では、各状態における最適化条件を求め、不確実性下における定常均衡を分析する。まず、状態 L における企業の問題について考える。(4.43) 式を用いて (4.42) 式を次のように書き換えることができる。

$$V_L(K) \equiv \max_I \left\{ [z_L(K + Idt) - \frac{b}{2}(K + Idt)^2]dt - \frac{c}{2}I^2dt \right. \\ \left. + (1 - rdt)(1 - \epsilon dt)V_L(K + Idt) + (1 - rdt)\epsilon dt V_H(K + Idt) \right\} \quad (4.46)$$

(4.46) 式を更に変形し、 $dt \rightarrow 0$ に関する極限をとると、

$$0 \equiv \max_I \left\{ z_L K - \frac{b}{2}K^2 - \frac{c}{2}I^2 + V_L'(K)I - (r + \epsilon)V_L(K) + \epsilon V_H(K) \right\} \quad (4.47)$$

を得る。(4.47) 式から得られる 1 階の条件は次の通りである。

$$cI = V_L'(K) \quad (4.48)$$

また、包絡線定理より (4.47) 式を K について最適化すると、

$$0 = \max_I \left\{ z_L - bK + V_L''(K)I - (r + \epsilon)V_L'(K) \right\} \quad (4.49)$$

という条件式を得る。(4.48) より、(4.49) 式は次のように書き換えることができる。

$$z_L - bK + c\dot{K} - (r + \epsilon)c\dot{K} = 0 \quad (4.50)$$

さて、(4.50) 式は K に関する 2 階の微分方程式である。 K の一般解を求めると、

$$K = \bar{K} + (K_0 - \bar{K})e^{\lambda t} \quad (4.51)$$

$$\text{where } \lambda = \frac{(r + \epsilon) - \sqrt{(r + \epsilon)^2 + 4b/c}}{4} < 0, \quad \bar{K} = \frac{z_L}{b} \quad (4.52)$$

ここで、固有値 (λ) は (4.52) 式で示したように負値のものについて考える。条件付安定的なシステムにおいて、サドル・パス上に存在するための条件である。

次に、状態 H について考える。先に指摘したように、正の投資に対する調整費用がかからないものと仮定しているので、状態 H の価値関数は、

$$V_H(K) \equiv \max_I \left\{ (z_H K' - \frac{b}{2} K'^2) dt + (1 - r dt) [V_H(K') (1 - \nu dt) + \nu dt V_L(K')] \right\} \quad (4.53)$$

となる。状態 L の価値関数と同様に書き換えると、最終的に

$$\begin{aligned} 0 &= \max_I \left\{ z_H K - \frac{b}{2} K^2 - (r + \nu) V_H(K) + \nu V_L(K) \right\} \\ &= z_H K - \frac{b}{2} K^2 - (r + \nu) V_H(K) + \nu V_L(K) \end{aligned} \quad (4.54)$$

を得る。(4.54) 式に包絡線定理を適用して、次の条件を得る。

$$z_H - bK + \nu V_L'(K) = 0 \quad (4.55)$$

状態 H における最適な資本ストック水準 (K_H^*) は (4.55) 式を満たすように決定される。(4.48) 式および (4.51) 式で示した一般解より、次のような部分調整式が導かれる。

$$V_L'(K) = c\dot{K} = \lambda c(K_0 - \bar{K})e^{\lambda t} \quad (4.56)$$

さて、この部分調整式を (4.55) 式に適用する。その際、 $K_0 = K_H^*$ と考える必要がある。正の投資に調整費用がかからないので、状態 H における資本ストック水準は K_H^* に等しいからである。また、調整局面に入る瞬間の状況を考慮するので、(4.55) 式は次のようになる。

$$z_H - bK_H^* + \nu \lambda c(K_H^* - \bar{K}) = 0 \quad (4.57)$$

左辺は、 K を微小分増加させることによって今期の限界収入と、将来におけるシャドー・バリューの和になっている。固有値 λ は負値であることから、シャドー・バリューが将来におけるコストを意味していることは明らかである。すなわち、 K の微小分の増加によって、今期における限界収入が発生する一方で、将来に資本ストックを減らす局面における限界的調整費用が高まるということを意味している。ここから、状態 H における最適資本水準 K_H^* が次のように求まる。

$$K_H^* = \frac{z_H - \nu \lambda c \bar{K}}{b - \nu \lambda c} \quad (4.58)$$

以上、状態 H、L における均衡 (E_H, E_L) における資本ストックの水準 (K_H^*, \bar{K}) を明らかにした。

不確実性の動学的影響

以下では、タイミングの不確実性が投資行動に与える動学的影響について議論する。(4.52)式で示したように、状態 L における資本ストックの水準 (\bar{K}) はモデルのパラメータによって決定される。従って、調整費用の関係から、不確実性の影響は状態 H における資本ストック水準に反映されることになる。均衡 E_H に存在する不確実性の影響は、次の 2 つの命題にまとめられる。

命題 3 状態 L にスイッチするまでの待ち時間が短くなると K_H^* は低下する。

命題 4 状態 H にスイッチするまでの待ち時間が短くなると K_H^* は増大する。

命題 3 の証明

企業環境の悪化する瞬間確率 (生起率) は ν であった。 K_H^* の ν に対する反応は、(4.57) 式を全微分することで調べられる。他のパラメータが一定であるものと仮定すると、次の偏微導関数が得られる。

$$\frac{\partial K_H^*}{\partial \nu} = \frac{\lambda c(K_H^* - \bar{K})}{b - \nu \lambda c} = \frac{\lambda c(z_H - z_L)}{(b - \nu \lambda c)^2} < 0 \quad (4.59)$$

以上、企業環境悪化という事象の生起率 (ν) が上昇すれば、状態 H における資本ストックが必ず減少するということが示された。減少幅が $(z_H - z_L)$ と比例関係にあることも明らかである。(証明おわり)

命題 4 の証明

企業環境の好転する瞬間確率 (生起率) は ϵ であった。従って、(4.57) 式を全微分して、 K_H^* の ϵ に対する動きを調べる。他のパラメータが一定であるものと仮定して、次の偏微導関数を求めることができる。

$$\frac{\partial K_H^*}{\partial \epsilon} = \frac{-\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} \nu c (b - \nu \lambda c) \bar{K} + \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} \nu c z_H - \frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} \nu^2 c^2 \lambda \bar{K}}{(b - \nu \lambda c)^2} = \frac{\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} \nu c (z_H - z_L)}{(b - \nu \lambda c)^2} \quad (4.60)$$

さて、固有値 λ の ϵ に関する偏微導関数は

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \epsilon} = \frac{-(r + \epsilon) + \sqrt{(r + \epsilon)^2 + 4b/c}}{4\sqrt{(r + \epsilon)^2 + 4b/c}} > 0 \quad (4.61)$$

となり、必ず正値をとる。従って、(4.60) 式が必ず正となることが分かる。以上、企業環境が好転する瞬間確率 (生起率) が高まると、状態 H における資本ストックが必ず

上昇することを示した。なお、上昇幅は $(z_H - z_L)$ と比例関係にある。(証明おわり)

命題のメカニズムとインプリケーション

各命題の基礎となるのは、合理的企業の事前的最適化行動である。すなわち、最適資本水準の決定式

$$\hat{z}_H - bK_H^* + \nu\lambda c(K_H^* - \bar{K}) = P_I \quad (4.62)$$

が基礎となる。(4.62) 式は、 K_H^* を微小分増加させた場合の動学的限界収入(今期の限界収入 + 将来のシャドー・バリュー)と限界費用とが一致するという、動学的な限界原理を示している。

命題3のメカニズムは、「状態Lの生起率(ν)の上昇が将来のシャドー・コストを高めると共に期待収益を低下させ、(4.62)式が成立する水準にまで K_H^* を下落させること」である。状態Hにある任意の時点において、状態Lにスイッチするまでの待ち時間がより短く、より確実であるほど K_H^* の期待限界収入の割引現在価値が低下するわけである。一方、状態Hである任意の時点において状態Lへの待ち時間が短縮することは、投資に対する企業態度を慎重化させるという効果も持つ。いま、 K_H^* の動学的限界収入弾力性 η_H を計算すると、次のようになる。

$$\eta_H \equiv -\frac{dK_H^*}{K_H^*} / \frac{dDMR}{DMR} = \frac{1}{b - \nu\lambda c} \cdot \frac{DMR}{K_H^*} \quad (4.63)$$

前述の通り、負の固有値($\lambda < 0$)のみを考慮しているので ν の上昇は必ず $\partial K_H^* / \partial DMR$ を減少させることになる⁷。すなわち、任意の動学的限界収入(DMR)-資本(K_H^*)比率に対し、 η_H の値が小さくなるのである。これは、 ν の上昇が期待調整費用(資本のシャドー・コスト)を高めるということに由来する。以上より、「状態Hである任意の時点から状態Lに切り替わるまでの待ち時間の短縮は、企業の投資行動を抑制する」と言うことが出来る。

命題4には、状態Lである任意の時点から状態Hに切り替わるまでの待ち時間が短くなると、状態Lにおける資本の調整スピードが遅くなるというメカニズムが働いている⁸。これは、状態Hの生起率 ϵ の上昇で状態Lの持続時間が短縮されることと

⁷前節と同様、DMRとは動学的限界収入を表している。

⁸前掲(4.61)式を参照のこと。

関連している。こうした結果、 K_H^* のシャドー・コストが低下して投資が増大するのである。一方、状態 L である任意の時点において状態 H への待ち時間が短縮することは、投資に対する企業態度を活発化させるという効果も持つ。 ϵ の上昇は λ を高め、 $\partial K_H^* / \partial DMR$ を増大させることになるからである。すなわち、「状態 L である任意の時点から状態 H に切り替わるまでの待ち時間の短縮は、企業の投資行動を積極的にする」と言うことが出来る。

日本経済への含意

本節のモデルは設備投資の非可逆性を加味し、繰り返し起きる企業環境変化に関するタイミングの不確実性を考慮している。このモデルを用い、再び 1990 年代以降の日本経済についての近似的議論を行うこととする。いま、90 年代において唯一上向き基調であった 95-97 年を状態 H として考える。他の時点は状態 L であったと考えることができる。このことは、状態 H から L へのスイッチまでの待ち時間が十分短く、かつ確実なものであったことを示唆している。また、状態 L への待ち時間に比較して状態 H への待ち時間は十分長くなったものと考えられる。

従って、本節のモデルで日本経済を近似するならば、状態 L から H への推移確率は小さく、かつ状態 H から L への推移確率は高いものとなる。このような場合、合理的企業は専ら状態 L を重視することになり、投資行動はかなり控えめなものとなる。この近似的議論によると、2 つのことが重要となる。1 つは確実に効果が上がる経済政策を立ち上げて経済主体に信じさせることである。もう 1 つは、景気の悪転を防ぐような政策を敷き、状態 L までの待ち時間を長期化させることである。これらの政策が企業の投資行動を活発化することは、命題 3・4 の示唆するところである。

第 3 節 主観的分布と客観的分布の乖離

これまでの節では、タイミングに関する確率分布を企業が正確に把握することができるという前提の下で議論した。しかし、経済主体が任意の確率変数に関して正確な情報を把握しているという仮定は、必ずしも現実的なものではない。経済主体は一般に、確率的に変動する事象についての確率的構造を仮定し、その仮定に基づいて将来

を予測する。本節では、確率変数について企業が仮定する確率分布（主観的分布）と真の確率分布（客観的分布）とが異なっている時に、その乖離が設備投資行動に与える影響について分析する。数値計算は第2節の理論的枠組みで、日本経済の現状を想定して行うこととする⁹。

諸設定

企業環境が繰り返し変化し、かつそのタイミングが不確実であるような状況を考える。客観的分布は第2節と同様、2状態マルコフ過程とする。すなわち、状態Hへのスイッチが起きるまでの待ち時間がパラメータ ϵ の指数分布に、状態Lへのスイッチが起きるまでの待ち時間がパラメータ ν の指数分布に従う場合を想定する。一方、企業の主観的分布については、「スイッチが起きない」という事象の確率を1とするようなデルタ測度を仮定する。このとき、企業の想定する最適資本水準は現時点での状態に依存して確定的に決まる。状態Hにおいては $K_H^* = \frac{z_H}{b}$ 、状態Lにおいては $K_L^* = \frac{z_L}{b}$ である。どちらの状態においても、企業は当該状態が永続するものと考えているのである¹⁰。

この仮定は、ややクリティカルではあるが、日本経済を近似するものであろう。例えば、高度経済成長以降、多くの人々が日本経済の永続的成長を信じていたことは歴史的事実と言えよう。この仮定に基づくと、多くの個別企業が十分1に近い確率で状態Hが続くという主観的分布に基づいた結果バブルが発生したとすることができる。また、90年代以来の不況を脱しきれずにいる現在、もはや企業は状態Hに転ずることを期待せずに、状態Lを想定した堅実な経営を志す傾向にあると言える。有効な打開策を見出せないまま長期不況にある日本では、状態Hへのスイッチを低く評価するという推論は、適応的期待からも一定の妥当性を持ち得る。従って、日本経済における企業が抱く主観的分布の近似として、どちらの方向のスイッチも考慮しない測度を想定する。

⁹本節で行う数値計算のプログラムは、気象大学校在学学生である佐々木康憲氏に提供していただいた。数値計算にはFortranを用いている。

¹⁰状態Hにおいては当然、主観的最適資本水準 K_H^* が客観的最適資本水準 $\geq K_U^*$ よりも大きくなっている。

需要曲線と費用関数については、次のようなパラメータを仮定する。

$$\text{状態 H : } P = 6 - K, \quad \text{状態 L : } P = 5 - K \quad (4.64)$$

$$\text{費用関数 : } C(I) = \begin{cases} 0 & (I_t > 0) \\ \frac{0.7}{2} I_t^2 & (I_t \leq 0) \end{cases} \quad (4.65)$$

さて現実においては、売上の増大は企業の財務状況を改善して信用を高める為、銀行などからの貸付利率は一般に低くなる。金融の自由化が進んだ最近においては現実性のある事項である。このことを考慮して、状態 H においては $r_H = 0.02$ 、状態 L においては $r_L = 0.05$ であるものとした¹¹。初期において、企業は状態 L にあるものとし、初期の資本ストック水準は 0 であるとする。

客観的分布をマルコフ過程とすることから、スイッチの生起間隔はパラメータ ϵ 、 ν に従う指数分布に従うように設定した。Fortran には、一様分布に従う乱数を発生させる機能が備わっているので、その一様乱数を指数分布に従うように変換して使用した。いま、一様乱数の系列を w_t とする。そして、 $t \geq 0$ について $w_t (0 < w_t < 1)$ は互いに独立であるとみなせるものとする。このとき、

$$D_t = -\epsilon^{-1} \ln w_t \quad (4.66)$$

とすると、 D_1, D_2, \dots は平均が ϵ の指数分布をし、互いに独立な系列となる (see Appendix)。実行に当たっては、 $\epsilon = \nu = 5$ を適応した。Fortran のプログラムは、付録 4 に示されている。

数値計算結果と考察

シミュレーション結果は、付録 5 に示されている。企業はあらゆるスイッチを全く想定していないということは、図 (付録 7) から明らかである。企業はスイッチが起きてから急遽調整を行っている。また、スイッチが起きた後において 2 度とスイッチが起きないということを予想しているということも確認される。状態 H へのスイッチが起きる場合には、調整費用が発生しないため、資本ストックの水準の上方ジャンプが起きる。しかし、状態 L へのスイッチが起きた場合には規模に関し

¹¹ 利率の違いは、現在割り引き価値に直すときにのみ影響がある。従って、一定の利率を採用する場合と本質的な差異は発生しない。

て遞増的な調整費用が発生するため、資本ストック水準をジャンプさせることは最適な行動ではない。予想外の企業環境変化が起きてしまったことを所与として、費用が最小になるように資本ストックを徐々に解除していることが分かる。資本を解除することが、設置することに比べて困難であることを反映した仮定（投資の非可逆性）の結果である。

数値計算結果から、主観的分布と客観的分布とが異なっている場合には、企業は事前的最適化行動をとっているにもかかわらず、客観的には最適となっていないことが確認される。その原因は、事前的最適化行動を行う際に基準とする主観的分布が、実際に成立しているものと異なっている点にある。企業が客観的分布に基づくスイッチを考慮していたならば、状態Hにおける資本ストックをやや低い水準に抑えることが予想される。状態Lへスイッチする可能性がある限り、資本のシャドー・バリューが低くなるからである。ここで示した極端な場合だけでなく、主観的分布の客観的分布からの乖離は企業の事前的最適化行動を歪める。そして、投資には調整費用が発生するため、最適化行動の歪みは企業に帰着することになるのである。

調整費用の影響

投資の非可逆性は、状況が悪化した場合の調整が難しいことを意味している。調整が困難であればほど、企業は状態Lにおいて最適な資本ストック水準を達成することができなくなる。資本ストックが最適な水準に調整されないことによる損失は利潤水準に現れる。このことを明らかにすべく、限界調整費用を10、100に変更したものを各々計算した。調整費用以外の設定については、これまでと同様である。限界調整費用を10とした数値計算結果を系列1とし、限界調整費用を100とした数値計算結果を系列2と呼ぶこととする。両系列を比較することができるように、算出にあたっては同一の乱数を用いた。計算結果は、付録6に示した。図（付録8、9）では、両系列を重ねて掲載している。

付録8より、状態Lへのスイッチした場合の調整が、系列2の方が緩やかであることが分かる。より高い調整費用が、状態Lにおける最適な資本ストック水準への調整を阻んでいるのである。このことが、利潤を低めていることは、付録9により明らかである。また、計画期間が120期であるとした場合の価値関数の値が、系列1にお

いては 208.56 である一方で、系列 2 においては 196.24 となっている点からも確認される。調整費用が与える影響が大きいことが再度確認される結果である。

おわりに

本章では、タイミングの不確実性が設備投資行動に与える影響について理論分析を行った。第 1 節では 1 度限りの企業環境変化（状態 L から H へのスイッチ）を想定し、ポアソン過程を用いてタイミングの不確実性を扱った。第 1 節からは 2 つの命題が得られた。1 つは、不確実性下における定常均衡が状態 H と L との間に位置するものとなっていることである。もう 1 つは、不確実性下における定常均衡は、状態 H へのスイッチまでの待ち時間が短くなるほど不確実性下の最適資本水準が高くなるということである。これらは、企業が不確実性下において事前的最適化行動をとった結果として導かれている。状態 H にスイッチまでの待ち時間に関する不確実性の程度は、資本ストックのシャドー・バリューを変化させ、最適な資本ストックの水準を変化するのである。

第 2 節では、企業環境変化が繰り返し起きる場合についてタイミングの不確実性を分析した。また、投資の非可逆性を明示的に考慮して分析を行った。タイミングの不確実性は、状態の実現の仕方がマルコフ過程に従うものとして扱っている。第 2 節からも 2 つの命題が導かれる。1 つは、状態 H から L に切り替わるまでの待ち時間が短くなると、状態 H における最適資本水準が低下することである。もう 1 つは、状態 L から H に切り替わるまでの待ち時間が短くなると、状態 H における最適資本水準が上昇することである。これらの命題から、状態 L までの待ち時間が短いほど企業が投資に慎重となることや、状態 H までの待ち時間が短いほど積極的になるということも示された。このことは、待ち時間に関する不確実性が変化することによって、動学的限界収入に関する資本需要の弾力性が変化することに注目した議論であった。

第 3 節では、個別企業の想定しているタイミングの確率構造が、実際に成立しているものが異なっている場合について分析を行った。いわゆる、主観的分布が客観的分布から乖離している状況について考察を行ったわけである。具体的には、状態 H と L とが 2 状態マルコフ過程に支配されている場合に、企業が確率 1 でスイッチしないと信じている場合について、Fortran を用いて数値計算を行った。結果、主観的分

布と客観的分布の乖離の下では、企業の事前的最適化行動は往々にして適切ではないということが確認された。

Appendix

本文中(4.66)式で定義した $\{D_t = -\epsilon \ln w_t\}$ が指数分布に従うことを証明する。ここで、 w_t は $0 \leq w_t \leq 1$ において一様分布する確率変数であり、 ϵ は正の定数であった。確率変数 D_t の積率母関数を $M(\phi)$ とすると、

$$M(\phi) \equiv E[e^{\phi D}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\epsilon \phi \ln w} f(w) dw \quad (4.67)$$

と表現される。ここで、 $-\epsilon \phi \ln w = w^{-\epsilon \phi}$ であるので、

$$E[e^{\phi D}] = \int_0^1 w^{-\epsilon \phi} dw = \left[\frac{w^{1-\epsilon \phi}}{1-\epsilon \phi} \right]_0^1 = \frac{1}{1-\epsilon \phi} \quad (4.68)$$

を得る。(4.68)式は、パラメータ $\frac{1}{\epsilon}$ の指数分布の積率母関数である。従って、 $\{D_t = -\epsilon \ln w_t\}$ はパラメータ $\frac{1}{\epsilon}$ の指数分布に従うことが示された。互いに独立であることは明らかである。

< 別証明 >

τ を正の定数とすると、一様分布する確率変数 $w_t (0 \leq w_t \leq 1)$ について、

$$\begin{aligned} P(D_t \leq \tau) &= P(-\epsilon \ln w \leq \tau) \\ &= P(e^{\epsilon \ln w} \geq e^{-\tau}) \\ &= P(w_t \geq e^{-(1/\epsilon)\tau}) = 1 - e^{-(1/\epsilon)\tau} \end{aligned} \quad (4.69)$$

である。以上より、 D_t は平均 $\frac{1}{\epsilon}$ の指数分布をする。

第5章 不確実性と投資に関する計量 分析

はじめに

本章は、不確実性が投資に及ぼす影響について、実証的に分析することを目的としている。実証分析は、現実のデータと統計的手法とを用いて行うため、理論的考察の妥当性を検証する、あるいはデータから情報を抽出することに有効である。しかし、データは様々な要因を反映しており、また、ある要因は種々のデータに反映されているため、実証分析特有のデータに関する制約も少なくない。従って、分析対象を比較的良好に反映すると考えられる代理変数を用いて議論が行われる。本稿では、需要量が増加するタイミングの不確実性は需要自体の変動の不確実性に含まれるものと考え、需要に関する不確実性と投資との関係を扱うこととする。

需要の不確実性を分析対象にすることは、本稿における理論的考察を間接的に議論することを可能とするだけでなく、需要水準の不確実性に焦点を当てた理論分析へのインプリケーションを引き出すことをも可能とする。本章では、不確実性と設備投資 不確実性の代理変数 時系列分析と定常過程の3つを柱として議論を展開することとする。

第1節では、需要水準に関する不確実性を議論するオプション理論を説明する。第2・3節では、不確実性と投資に関する実証分析を展開する。まず第2節では、本稿第4章を背景とした投資関数を設定し、日本の製造業に関する時系列データを用いた重回帰分析を行う。ただし、3つ目の柱との関係から、敢えて「定常性」に言及せずに分析を行っている。定常性を考慮しない時系列分析のもたらす問題点を明らかにするためである。第3節では、定常性に関する議論を行った上でインパルス応答関数を計測する。

第1節 リアル・オプション理論

リアル・オプション理論

リアル・オプション理論は、ファイナンスにおけるオプション理論と投資の非可逆性という性質を組み合わせ、企業の非連続的な資本ストック調整行動を説明するモデルである。オプション理論は、伝統的な投資決定基準と現実との乖離¹ 不確実性が投資を抑制する効果の2点について合理的説明を与え、注目を集めている²。

オプション理論は、設備投資に埋没的費用 (sunk cost) 将来の経済環境に関する不確実性 設備投資を先送りする権利の3つが存在する場合には、設備投資を先送りすることにオプション価値が発生するという点に注目している。設備投資を延期できるという権利がファイナンスにおけるコール・オプションに相当し、設備投資額がオプション価格に相当している。企業は、投資を先送りすることのオプション価値が設備投資の実行に見込まれる将来収益の割り引き現在価値を下回った時点で投資を実行することになる³。

3 期間モデルによる説明

ここで、簡単な3期間モデルを用い、不確実性が存在する場合に投資の非可逆性が投資の機会費用を生み出すこと、そしてその機会費用が投資決定に影響を与えることを説明する。いま、機械工業を営む企業が新しい工場への投資を検討している状況を考える。新工場では、1年間に200台の電気自動車を1台あたり198万円の費用で生産することが出来る。新工場の操業には、製造設備のリース料として年初に5000万円支払う必要がある。契約の途中解約や工場所有権の転売は認められないため、5000万円は埋没的な費用となる。ただし、価格低下による損失が発生する場合には、追加

¹各基準の臨界値 (NPV=0, q=1 など) を僅かに越えただけでは投資が実行されない場合が多い。

²ビジネスの世界では投資の予想将来収益の割引現在価値を投資費用とを比較する「割引現在純価値 (NPV) 基準」が広く用いられてきた。マクロ経済学ではトービンの q 理論が有力な投資決定基準である

³オプション理論は、個別プロジェクトに関するタイミングを説明するものである。ただし、最適な資本蓄積経路に言及するものではなく、本稿の議論とは決定的に異質なものであることを強調しておく。

的費用負担なしに操業を一時停止することができる。電気自動車の価格は1年目には1台200万円であるが、1年目以降には確率0.75で1.2倍の値となり、確率0.25で0.9倍の値になる。年内に生産された電気自動車を販売する機会は年末に限られ、投資に関する意思決定は各年初に行われるものとする。安全資産利子率は一律10%である。

企業は、投資のタイミングを決定するため、リスク中立確率と安全資産利子率とを用いて各期の新工場投資プロジェクトの価値を計算する⁴各期のプロジェクト価値 $V_t(t = 1, 2, 3)$ の計算式は以下の通りである。

$$V_1 = R_1 + \frac{E[R_2]}{(1+r)} + \frac{E[R_3]}{(1+r)^2}, V_2 = R_2 + \frac{E[R_3]}{(1+r)}, V_3 = R_3 \quad (5.1)$$

ここで、裁定理論を用いて具体的にリスク中立確率を求める。3年目のプロジェクト価値は、電気自動車価格の上昇・下落1対1対応する形で $V_{3H} \cdot V_{3L}$ の値をとる。ここで、2年目時点で所有権を x 円と安全資産 b 円を購入して、3年目に $V_{3H} \cdot V_{3L}$ を生み出すようなポートフォリオを \hat{Y} とすると⁵、 $1.2x + 1.1b = V_{3H}$ 、 $0.9x + 1.1b = V_{3L}$ が成立する。これより、

$$(x, b) = \left(\frac{V_{3H} - V_{3L}}{0.3}, \frac{1.2V_{3H} - 0.9V_{3L}}{0.33} \right)$$

を得る。従って、

$$EV_3 = \frac{V_{3H} - V_{3L}}{0.3} + \frac{1.2V_{3H} - 0.9V_{3L}}{0.33} = \frac{1}{1.1} \{qV_{3H} + (1-q)V_{3L}\} \quad (5.2)$$

が成立する。ここで、 $q \equiv \frac{(1+r)-0.9}{1.2-0.9} = \frac{2}{3}$ であるが、これが前述のリスク中立確率である。リスク中立確率と安全資産利子率、そして(1)式を用いて各時点におけるプロジェクト価値を求めることができる。計算結果 $\max[V_t, 0]$ は表5.1に示した通りである。NPV基準による意思決定を行うならば、投資は1年目に行われる。1年目において、投資収益の割引現在価値から投資費用を差し引いたものが正となっているからである。また、トービンの q 基準に基づく場合にも1年目に投資が行われる。リース料

⁴ オプション理論に基づくプロジェクト価値の評価は、フィナンシャル・オプションのプライシング理論を応用おり、期待値の計算にはリスク中立確率を用いる。リスク中立確率とはリスクに対する市場評価を織り込んだ確率のことで、この確率を用いて期待値を計算する場合には安全資産利子率を用いて割引現在価値を計算できる。

⁵ 電気自動車の所有権の価格は電気自動車価格と1対1対応している。不自然であるが、完全に可分であるものとする。

表 5.1: 各時点のプロジェクト価値 (単位: 万円)

1 年目	2 年目	3 年目
		16363.64
	18545.45	3272.73
12204.36		
	1983.47	4272.73
		0

金をプロジェクトの再構築費用とし、プロジェクト収益のリスク中立確率に基づく期待割引価値との比を Q とすると、1 年目は $Q=2.44$ となり、臨界値である 1 を大きく超えているからである。

一方、オプション価値基準に基づく意志決定を行うならば、1 年目の投資は見送られることになる。企業は投資を先送りすると期待収益を放棄するものの、翌年収益環境が改善した場合に投資をすれば、むしろ高いペイオフを得られる可能性がある。この投資を先送りする価値、すなわちオプション価値 F_t がペイオフを上回る限り投資は見送られることになる。各期のペイオフ $\max[PO_t, 0]$ とオプション価値 F_t とを書き並べたものが表 5.2 である。() 内に示されている数値がオプション価値である。価格が 1.2 倍になった場合の 2 年目に $F_2 < PO_2$ となっていることが確認される。

まとめ

オプション理論が示唆する投資のタイミングは、投資の期待収益割引現在価値が投資を先送りするオプション価値を上回る時点である。オプション理論を用いると、NPV 基準やトービンの q 基準が示唆するよりも投資のタイミングが遅れることを合理的に説明することができた。また、オプション価値は不確実性 (将来収益の変動) と密接に関係しており、不確実性が高まるほど投資の見送られる可能性が高まるということも分かった。オプション理論の実証分析は数多く行われているが、不確実性と投資の負の相関は実証的にも証明されている。

表 5.2: 各時点のプロジェクト価値 (単位: 万円)

1 年目	2 年目	3 年目
		11363.64
	13545.45 (6887.05)	0
7204.36 (8209.36)		
	0 (0)	0
		0

第 2 節 重回帰モデルによる計量分析

モデルの定式化とデータ

第 2・3 章で導出した投資関数は、状態変数である資本ストック (K_t) の関数であった。

$$i.e. I_t = \alpha + \beta K_t \quad (5.3)$$

明らかにしたように、不確実性の影響は定数項 (α) や係数 (β) に現れていた。しかし、実際のデータを用いて α や β を推計する場合、それらの値から不確実性の影響を抽出することは不可能である。従って、理論的投資関数 (5.3) に不確実性の代理変数を付け加え、不確実性が設備投資の変動に対して統計的に有意な説明力を有しているかを検証することとする。このような考え方は、ある程度のコンセンサスを得ているものである。例えば、q 理論に基づく投資関数は、必ずしも限界の q (の代理変数) のみに諸要因が反映されているわけではないとして、金融変数や不確実性の変数を加えて研究が盛んに行われている⁶。推定に使用されるデータは、財務省『法人企業統計』から作成した 1974 年第 3 四半期 (1974q3) から 2000 年第 2 四半期 (2000q2) における製造業全体の諸データである。推定される投資関数は次の通りである⁷。

$$LNI_t = \alpha + \beta_1 LNEY_t + \beta_2 LNUY_t + \beta_3 Di_t + u_t \quad (i = 1, 2) \quad (5.4)$$

⁶ 伴 金美 (1991) 『マクロ計量モデル分析: モデル分析の有効性と評価』参照。

⁷ 前述の通り、本章の分析は第 4 章の理論分析を応用している。従って、線形生産関数の仮定より、 K_t は Y_t と置き換えて議論することができる。

表 5.3: 変数の説明

記号	記号の表す変数とその説明
LNI	投資額対数値
LNEY	売上高の移動平均対数値：次期の売上高に関する企業の主観的予測値
LNUY	売上高の移動分散対数値：次期の不確実性に関する企業の主観的予測値
D1	バブル期を西暦年区切りによって特定化したダミー（'87q1 - '92q4=1, otherwise=0）
D2	バブル期を年度区切りによって特定化したダミー（'87q2 - '93q1=1, otherwise=0）

ここで、 $D_{i,t} (i = 1, 2)$ は次のような変数である。

$$D_{1,t} = \begin{cases} 1 & (if\ t = 1987q1 - 1992q4) \\ 0 & (otherwise) \end{cases}, \quad D_{2,t} = \begin{cases} 1 & (if\ t = 1987q2 - 1993q1) \\ 0 & (otherwise) \end{cases} \quad (5.5)$$

記号の意味は以下の通りである。 I_t ：t 期における実質設備投資額（除く土地）、 $LNEY_t$ ：売上高の t 期を含む過去 4 期の平均、 $LNUY_t$ ：売上の t 期を含む過去 4 期の分散、 $D_{i,t}$ ：バブルダミー ($i = 1, 2$)、 u_t ：誤差項。 (I_t, Y_t, U_t) については全て、実質化および季節調整を行っている。データの実質化には、『金融経済統計月報』より取得した卸売り物価指数を用い、移動平均法により季節変動を調整した。また、係数の推定値が弾力性となるなどの利点から、全ての変数について対数値をとっている。これらは、表 5.3 にまとめられている。

以下、変数および変数の作成方法について説明を加える⁸。 LNI は投資額であり、

$$\begin{aligned} \text{当期実質設備投資額（除く土地）} &\equiv \text{当期末有形固定資産実質額} \\ &\quad - \text{前期末有形固定資産実質額} \\ &\quad + \text{当期減価償却実質額} \end{aligned} \quad (5.6)$$

として作成した。1 つ目の説明変数である $LNEY_t$ には、売上に関する企業の主観的予測を反映させている。具体的には、比較的短期の変動を予測するモデルのひとつで

⁸変数の作成方法は、鈴木和志『設備投資と金融市場』（2000 年）第 1 章付録に基づいている。

ある平滑化 (smoothing) モデルを適応している⁹。これは、データが平均 μ のまわりを確率的に変動しているという構造を前提としている。

$$i.e. \ y_t = \mu + u_t \quad (t = 1, 2, \dots, T) \quad (5.7)$$

そして、平均が徐々に変動しているものと考え、直近 4 期の平均

$$\bar{y}_t = \frac{(y_t + y_{t-1} + y_{t-2} + y_{t-3})}{4} \quad (5.8)$$

を計算し、これを y_{t+1} の予測値とする。この方法は、移動平均とも呼ばれているが、適応的期待形成仮説をモデル化したものとして考えることができる。説明変数 $LNEY_t$ は \bar{y}_t を用いているので、企業の抱く次期に関する主観的売上予測値として解釈することができる。さて、次期の予想売上高が高ければ資本の限界収益は高いので、合理的企業は投資を増大させる。従って、売上高の移動平均の符号は正となることが妥当である。

$LNUY_t$ は不確実性の尺度を表す変数である。設備投資と不確実性に関する実証分析は、前節で概説したオプション理論を背景として多数行われている。それらの先行研究では、分散、標準偏差、リスクプレミアムや予測誤差などが不確実性の代理変数として扱われている。本稿では直近 4 期における売上高の分散 (移動分散) を用いる。

$$LNUY_t \equiv \frac{\sum_{i=0}^3 (y_{t-i} - \bar{y}_t)^2}{4} \quad (5.9)$$

定義式 (5.9) に示したように、 $LNUY_t$ は企業の形成する不確実性についての主観的予測値として解釈することができる。オプション理論の導く結論は、「将来についての不確実性が大きい場合にはオプション価値が高まり、設備投資が抑制される」というものである¹⁰。したがって、 $LNUY_t$ の係数は負値をとるものと考えられる。

ダミー変数 $D_{i,t} (i = 1, 2)$ は、主要説明変数である売上からバブルの影響を吸収することを目的としている。1987 年から 1992 年までの間にはバブルに起因する売上の乱

⁹平滑化モデルをより進めた方法に指数平滑化 (exponential smoothing) モデルがある。

$$\bar{y}_t = y_{t-1} + \rho(y_t - y_{t-1}) \quad \text{where } 0 < \rho < 1, \quad y_0 : \text{given}$$

で計算される \bar{y}_t を、 y_{t+1} の予測値とする方法である。

¹⁰先行する実証研究によると、不確実性変数の係数は概ね有意に負という結果が示されており、オプション理論の結論は支持されている

高下が観測されるため、1987年度から1992年度末までの間にのみ1をとり、それ以外の時期については0を取るような変数とした。この期間の選択は、第2章で述べた歴史的事実からも支持される。日本のバブル経済は、プラザ合意を契機とする円高不況（1985～86年）の後に始まり、1990年の株価大暴落と共に崩壊した。そして、1991年からのバブル不況は1993年に終わったとされているからである。 $D_{1,t}$ は1年の区切りを西暦年とし、 $D_{2,t}$ は年度としている点で異なっている。

以上より、定義した投資関数（5.3）には良好な2つの特徴があると言うことができる。第1に、説明変数として、主要説明変数の1次のモーメントだけでなく2次のモーメントまで考慮している点である。 $LNEY_t$ 、 $LNUY_t$ はそれぞれ、売上に関する1次のモーメント、2次のモーメントに対応している。1次のモーメントは企業の抱く期待値、2次のモーメントは売上の不確実性を表しているため、本稿の論点に関するインプリケーションは豊富である。第2に、第2章の議論を基に定式化を行ったため、理論的背景を具備しているという点である。また、 $LNUY_t$ を考慮したという点で、リアル・オプション理論からの考察も行うことができる。

実証結果

具体的には、バブルダミーを考慮しないモデル1、西暦年区切りでバブル期を特定化したダミー変数を加えたモデル2、そして年度区切りでバブル期を特定化したダミーを用いたモデル3を推計した。推計結果は表5.4にまとめられている。ダミー変数以外については対数値を用いているので、推計係数値は被説明変数の当該説明変数に関する弾力性となっている。売上の移動平均（ $LNEY$ ）の係数推定値は、いずれのモデルについても有意に0でない正の値となっている。企業の主観的売上予測の上昇は、生産意欲を刺激し、要素需要である投資を増大させると言うことができる。ここで、モデル1とモデル2、3とを比較すると、売上の移動平均の弾力性はモデル2、3においてより小さな値をとるが、そのt値についてはモデル1のものよりも大きいということが分かる。この事実は、企業の主観的売上予測についての係数をバブルが歪めていたことを示唆している。

売上の移動分散（ $LNUY$ ）の係数推定値は、全てのモデルについて負の値となっている。その係数値は、モデル2・3においては10%有意（モデル3においては、ほ

表 5.4: 実証結果 (1975 年第 2 四半期 ~ 2000 年第 2 四半期 ; 日本)

被説明説明変数=LNI			
	Model1	Model2	Model3
Const.	-3.66 (-7.75)	-3.05 (-6.97)	-2.90 (-6.87)
LNEY	1.06 (18.62)	0.99 (19.11)	0.98 (19.45)
LNUY	-0.01 (-0.83)	-0.02 (-1.83)	-0.02 (-1.96)
D1		0.19 (5.12)	
D2			0.21 (6.05)
Obs.	101	101	101
R^2	0.80	0.84	0.85

ば 5 % 有意) であるが、モデル 1 においては有意ということは出来ない。しかしながら、モデル 2・3 はモデル 1 を適切に改善したものと考えられるので、不確実性の増大は投資を抑制する効果を持っているとすることができる。この結果をオプション理論的に解釈するならば、投資の非可逆性は存在しており、不確実性の増大が投資延期のオプションプレミアムが上昇し、投資は抑制されていると言える。また本稿第 2 章に基づくならば、状況悪化への不確実性の方が、状況好転への不確実性よりも設備投資に対して強い影響を与えていると解釈することができる。

モデル 1 とモデル 2・3 の推計結果を比較すると、バブルダミーの有効性は明らかである。自由度修正済み決定係数、説明諸変数の有意性 (t 値) は全て、バブルダミーを加えることによって改善している。また、モデル 2 とモデル 3 を比較すると、日本経済は西暦年よりも年度という節目をもって動いていることが分かる。

まとめ

本節で推計した投資関数は、次期の売上と不確実性について企業が主観的に形成する予測値によってフローの投資額を説明しようとするものであった。推計結果によると、企業の主観的売上予測値の上昇は企業の生産意欲を刺激し、投資を増大させる影響がある。また、不確実性に関する企業の主観的予測値が高まると、投資が抑制されることが分かった。これは、不確実性が増大投資延期というオプションの価値が高まった為であると考えられる。

さて、先に述べたように本節では、3つ目の柱との関係から「定常性」に言及していない。定常性がされないまま統計的処理を行った場合に発生する問題を明らかにするためである。次節ではまず、時系列分析の基礎となる諸概念と定常性について議論を行った上で、本節の問題点を明らかにする。

第3節 定常過程とイノベーション会計

変数の定常性と回帰分析

変数の定常性およびその検定は、1970年代後半から盛んに議論されるようになったものである。時系列分析を適切に行うには確率論を理解することが必要である。時間の経過とともに観測されるデータ（時系列データ）は、確率過程の実現値として捉えられる。確率過程とは、ある系の状態が時間の経過と共に偶然的に変動していく様子の数学的記述である¹¹。

時系列分析は、確率過程の実現値である時系列データを用いた統計的分析であるので、対象とする確率過程は弱定常性（共分散定常性）を備えている必要がある。弱定常性は次のように定義される。

定義：弱定常性¹²

ある確率過程 $\{y_t\}$ が弱定常的（共分散定常的）であるとは、 $E(y_t) = \mu < \infty$
 $Var(y_t) = \gamma(0) < \infty$ $Cov(y_t, y_{t-s}) = \gamma(s) < \infty$ ($s = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$) という3つの条件を満たす場合を言う。

¹¹ 正式な定義は、第3章で与えている。

¹² 山本（1992）参照。

これらは、各 y_t の平均および分散が共通の有限な μ 、 $\gamma(0)$ で与えられ、 y_t と y_{t-s} の自己共分散 (autocovariance) $\gamma(s)$ も有限であることを示している。すなわち、確率過程の特性値はいずれも時刻 t に依存しておらず、当該確率過程が確率論的に平衡状態にあることを意味している。定常性を満たす確率過程は定常過程と呼ばれ、定常過程からのデータは定常な時系列データと呼ばれる。定常なデータは、水準やそのばらつき具合が時と共に変化しないようなデータである¹³。

計量経済分析では、確率過程の構造を特定化したモデルである、Slutsky の移動平均 (Moving Average : MA) モデルや、Yule の自己回帰 (Autoregressive Process : AR) モデル、および自己回帰移動平均 (Autoregressive Moving Average : ARMA) モデルがよく用いられる。しかし、これらのモデルで記述される確率過程は、常に定常であるとは限らず、ある条件を満たすことが必要となる。本稿では AR モデルの拡張であるベクトル自己回帰 (VAR) モデルを用いて分析を行うので、AR モデルに関する定常性の条件について説明する。

Φ は p 次の係数行ベクトルであり、その第 i 要素は ϕ_i と表わすと、 p 次の AR モデル (AR(p)) は $y_t = \Phi Y$ ($i = t-1, t-2, \dots, t-p$) と記述される。 Y は列ベクトル $Y = [y_{t-1}, y_{t-2}, \dots, y_{t-p}]'$ である。これは p 階の定差方程式であるので、適切に変形して次のような固有方程式を求めることができる。

$$1 - \phi_1\nu - \phi_2\nu^2 - \dots - \phi_p\nu^p = 0 \quad (5.10)$$

AR(p) モデルにおける定常性の条件は、(5.10) 式の全ての根が絶対値で 1 よりも大きいことである。これは、AR(1) モデルの場合は、1 次の遅れの係数 ϕ_1 が絶対値で 1 より小さい事に対応している¹⁴。また、AR(P) モデルについての定常性の条件は、定差方程式の安定性条件と一致している (See Apendix)。因みに、 ϕ_1 の絶対値が 1 に一致

¹³定常性の概念には、「弱定常 (共分散定常)」の他に「強定常」がある。確率過程 $\{y_t; t \in \Lambda\}$ が強定常 (Strictly stationary) であるとは、 $P(y(t_1+h) \leq y_1, \dots, y(t_n+h) \leq y_n) = P(y(t_1) \leq y_1, \dots, y(t_n) \leq y_n)$ が任意の $h, t_1, \dots, t_n \in \Lambda$ 、任意の $y_1, y_2, \dots, y_n \in S_t$ に対して成立することを言う。小和田正『確率過程とその応用』(1983) 参照。

¹⁴AR モデルの拡張と捉えられる VAR(p) モデルにおける定常性の条件は、(5.10) 式と同じものである。ただし、多変量であるため、行列式表示 $|I - \Phi_1 - \dots - \Phi_p| = 0$ となる。

する場合¹⁵は y_t は非定常過程であり、ランダムウォークと呼ばれる¹⁶。ARMA(p, q)モデルの定常性はその AR 部分に依存しており、AR(p)モデルと同一の条件である。MAモデルの定常性の条件は、ARモデルとほぼ同様の手順によって求められる¹⁷。

ここで、変数の定常性が満たされていない場合の問題に言及する。まず、定常性が満たされていない時系列データを用いる場合、平均、分散、自己共分散が t に依存して変化するので、推定することができない。また、非定常なデータは様々に異なった統計的性質を持つ確率変数 Y_t の実現値 y_t であるため、 y_t を1つの系列として統計的に処理することはできない。例えば、最小自乗法の説明変数が非定常な時系列データ y_t である時、Strict Exogeneity の仮定 ($E(\varepsilon_i|Y) = 0(i = 1, 2, \dots, n)$) や Spherical error variance の仮定 ($E(\varepsilon_i^2|Y) = \sigma^2(i = 1, 2, \dots, n), E(\varepsilon_i\varepsilon_j|X) = 0(i, j = 1, 2, \dots, n; i \neq j)$) が満たされない可能性がある。また、「見せかけの回帰 (Spurious Regression)」として知られる深刻な問題も発生する。見せかけの回帰とは、本来は関係の無い $I(1)$ 変数について回帰分析を行ったときに、変数が $I(1)$ 変数であるが故に良好な回帰結果をもたらしている状況を指す。

単位根の存在が及ぼす回帰分析への影響は無視できないほどに大きいのである。したがって、時系列分析をする際には変数に単位根が含まれているかどうかについて、十分な注意を払う必要がある。仮に非定常時系列を扱う場合には、共和分の検定や変数の定常化を行うなどの適切な措置をする必要がある。このことを踏まえ、以下では第2節の分析について再考する。まず、諸変数について単位根検定を行い、定常性を確認する。単位根検定の具体的手法は複数存在するが、ここでは ADF 検定を行った。そこで以下に記述される3つの回帰式を設定し、各回帰式の β の推定量に対する分布

¹⁵ 1以上である ϕ_1 は、インプリケーションにより排除される。 ϕ_1 の絶対値が1以上であるとき、差分方程式の固有値 λ の絶対値は1以上となっている。このとき、 y_t の値は有限時間内に発散することになるからである。

¹⁶ ϕ_1 の絶対値が1となる場合に弱定常性の条件が満たされないことは簡単に確認される。

¹⁷ 羽森茂之『計量経済学』(2000年)118-119頁参照。ただし山本(1992)によると、MA(q)モデルの場合は q が有限である限り、常に定常性は満たされているという。

表 5.5: 単位根検定 (1975 年第 2 四半期 ~ 2000 年第 2 四半期 ; 日本)

Deterministic term				
	q	None	Constant	Constant and trend
LNI	4	0.70	-1.01	-1.15
ΔLNI	3	.	.	-7.16
LNEY	3	2.03	-2.08	-1.81
LNUY	1	.	.	-6.24

表 (ディッキー・フラー分布) を用いて検定を行った。

$$\Delta Y_t = \beta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma_{it-i} + u_t \quad (5.11)$$

$$\Delta Y_t = \mu + \beta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma_{it-i} + u_t \quad (5.12)$$

$$\Delta Y_t = \mu + \delta t + \beta Y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \gamma_{it-i} + u_t \quad (5.13)$$

u_t は平均ゼロで有限値の分散をもつ誤差項である。 Δ は、階差オペレーターであり、 $\Delta Y_t \equiv Y_t - Y_{t-1}$ と定義されている。帰無仮説 (H_0) と対立仮説 (H_1) は

$$H_0 : \beta = 0, \quad H_1 : \beta < 0 \quad (5.14)$$

である。帰無仮説は当該変数が単位根を持つことを意味しており、対立仮説は当該変数が $I(0)$ 変数である、すなわち単位根を持たないということの意味している。ADF 検定における拡張項の同定には情報量基準を用いた。情報量基準には AIC (Akaike Information Criterion) と SBIC (Shwarz's Bayesian Information Criterion) とがあるが、本稿では一貫性 (consistency) を有する SBIC を基準として用いた。

単位根検定の結果は表 5.5 に示されている¹⁸。表中に示されている q は、SBIC に基づいて決定した拡張項の次数である。売上の移動平均対数値 (LNEY) と売上の移動分散対数値 (LNUY) については $I(0)$ 変数であると判断された。しかし投資の対数値 (LNI) については $I(1)$ 変数であることが分かった。以上より、第 2 節の回帰モデルで

¹⁸具体的手順は、羽森茂之『計量経済学』第 7 章に従った。

表 5.6: 実証結果 (1975 年第 2 四半期 ~ 2000 年第 2 四半期 ; 日本)

被説明説明変数=LNI			
	Model1	Model2	Model3
Const.	2.05 (1.27)	0.12 (0.50)	0.14 (0.56)
LNEY	-0.27 (-1.39)	-0.02 (-0.64)	-0.02 (-0.71)
LNUY	0.03 (0.65)	0.005 (0.63)	0.005 (0.63)
D1		0.03 (1.45)	
D2			0.03 (1.57)
Obs.	101	101	101
R^2	-0.0004	-0.001	0.003

は、I(1) 変数を I(0) 変数で回帰するものとなっていることが明らかになった。この場合、残差に系列相関が残っている可能性が非常に高い¹⁹。モデル内に I(1) 変数は 2 つ以上存在しないため、共和分の可能性についても排除される。従って、第 2 節の分析結果には統計的裏づけが存在せず、その分析の意義は無いに等しいということになる。

第 2 節の回帰モデルについて考えられる改善方法は、I(1) 変数である LNI の定常化を行うことである。全ての変数について定常性が満たされているならば、回帰分析は有効である。いま、第 2 節の回帰モデルを、次のように定式化しなおす。

$$\Delta LNI_t = \alpha + \beta_1 LNEY_t + \beta_2 LNUY_t + \beta_3 Di_t + u_t \quad (i = 1, 2) \quad (5.15)$$

なお、モデルの含意は以前と同じであり、ダミー変数は当初の定義式 (5.5) に従う。計測結果は表 5.6 に示した通りであるが、各モデルに説明力が無いことが明らかとなった。表 5.4 の結果と比較すると、その結果の違いは歴然たるものである。定義により、

¹⁹残差が I(1) 過程になっている可能性も高い。

この現象は「見せかけの回帰」には当たらないが、表 5.6 の結果より、当初設定した回帰モデルが不適切であったことが分かった。以下ではインパルス応答関数を用いて「不確実性と投資の関係」について実証的に明らかにすることとする。

2 つの VAR モデルとインパルス応答関数

投資と不確実性の間に成立している関係を明らかにすべく、本章第 2 節で作成した諸変数を用いたイノベーション会計を行う。諸変数についての含意はこれまでの分析と同様のものとして解釈する。つまり、企業の抱く次期に関する売上予測値と不確実性予測値、そして当期の投資との間に成立する関係をデータに基づいて明らかにすることになる。

ここで、分散を計算する元のデータがトレンドを持つ場合に、分散が適切な不確実性の指標とならない可能性について考える。例えば、当期を含む過去 4 期の売上に上向きのトレンドが存在する場合を考える。このとき、確かに売上は変動しているため、企業の形成する来期の不確実性予測値は増大する。しかし、この増大は売上の不確実性を適切に反映するものではない可能性がある。トレンドが明確であるほど、適応的期待を形成する企業は将来に対する不安感を持たなくなる可能性があるのではないだろうか。例えば、過去 4 期の売り上げが波動の如き動きをしている場合をも考えてみよう。この場合にも来期に関する不確実性予測値は増大するが、このような増大こそが本来の不確実性を表しているのではないだろうか。仮にこの考え方に従うならば、不確実の指標としては、トレンドを除去した売上データから得られる移動分散を用いることが望ましい。

以上より、本節では 2 つの VAR モデルを設定し、「不確実性と投資」に関する実証分析を行うことにする。1 つは、投資の対数値の 1 階の階差 (ΔLNI)、売上の移動平均対数値 ($LNEY$) および売上の移動分散対数値 ($LNUY$) による VAR モデル 1 である。もう 1 つは、投資の対数値の 1 階の階差 (ΔLNI)、売上の移動平均対数値 ($LNEY$) およびトレンドを除去した売上の移動分散対数値 ($LNUU$) による VAR モ

表 5.7: トレンドの決定 (1974 年第 3 四半期 ~ 2000 年第 2 四半期 ; 日本)

被説明説明変数=売上高 (Y_t)			
	1 次近似	2 次近似	3 次近似
Const.	3562.5 (48.7)	3275.8 (31.2)	3839.7 (33.1)
<i>time</i>	70.4 (58.2)	86.6 (18.8)	23.7 (2.5)
<i>time</i> ²		-0.2 (-3.6)	1.34 (6.4)
<i>time</i> ³			-0.01 (-7.2)
Obs.	104	104	104
R^2	0.971	0.974	0.982

デル 2 である。

$$Y_{h,t} = \Phi_0 + \Phi_1 Y_{h,t-1} + \Phi_2 Y_{h,t-2} + \dots + \Phi_p Y_{h,t-p} + U_t \quad (h = 1, 2) \quad (5.16)$$

$$\Phi_0 = \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix}, \quad \Phi_k = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t-k) & \phi_{12}(t-k) & \phi_{13}(t-k) \\ \phi_{21}(t-k) & \phi_{22}(t-k) & \phi_{23}(t-k) \\ \phi_{31}(t-k) & \phi_{32}(t-k) & \phi_{33}(t-k) \end{bmatrix} \quad (k = 1, 2, \dots, p)$$

ただし、

$$\text{VAR モデル 1 : } Y_{1,t} = \begin{bmatrix} LNEY_t \\ LNUY_t \\ \Delta LNI_t \end{bmatrix}, \quad \text{VAR モデル 2 : } Y_{2,t} = \begin{bmatrix} LNEY_t \\ LNUU_t \\ \Delta LNI_t \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

である²⁰。2つのモデルのパフォーマンスを比較することによって、不確実性の代理変数に関する議論をも行うこととする。

ここで、売上データからトレンドを除去した上での移動分散を計算する必要がある。そこで、売上からトレンド (trend) モデルを援用することによってトレンド除去を行っ

²⁰変数の並べ方は、先決性を基にした。頑健性については後ほど議論する。

表 5.8: LNUU に関する単位根検定 (1975 年第 2 四半期 ~ 2000 年第 2 四半期 ; 日本)

	q	Deterministic term		
		None	Constant	Constant and trend
LNUU	2	-0.35	-3.35	-4.97

た。トレンドモデルとは、時刻 t に関する被説明変数の変化を分析するもので、比較的長い期間における傾向をとらえることに用いられる。トレンドモデルの関数型は様々に存在するが、本分析においては、多項式モデルの中で最も当てはまりの良い 3 次曲線を選択した。当てはまりの基準としては、各モデルの決定係数を用いた。トレンドモデルの短所であるモデル選択の恣意性を多少なりとも弱めるためである。結果は表 5.7 に示されている。ここから得られる残差を「トレンド除去済み売上高」と定め、移動分散 (LNUU) を計算した。得られた系列に対し、単位根検定を行った結果、 $I(0)$ 変数であることも明らかになった。単位根検定の結果は、表 5.8 に示されている。VAR モデル 1, 2 のラグ次数は、1 次から 8 次の中で SBIC により共に 4 次が選ばれた²¹。VAR モデル 1, 2 の推定結果は表 5.9 にまとめられている。

推計した VAR モデルを基にインパルス応答関数の計測を行う。イノベーション会計を行うためには、VAR(p) モデルを $VMA(\infty)$ 表現に書き換える必要がある。VAR モデルで記述される確率過程が定常性を満たすとき、 p 次の VAR モデルは無次元のベクトル移動平均 (Vector Moving-Average) モデルとして表すことができる。 n 変量の VAR(p) モデルは、

$$Y_t = \Phi_1 Y_{t-1} + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + U_t \quad (5.18)$$

と表される。 Y_t は n 次元の列ベクトル、 $\Phi_k (k = 1, 2, \dots, p)$ は

$$\Phi_k = [\phi_{k,ij}] \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (5.19)$$

の係数パラメータの n 次元正方行列である。また、 U_t は $u_t = [u_1, u_2, \dots, u_n]'$ なる錯乱項の n 次元列ベクトルであり、 $E(U_t) = 0$ $Var(U_t) = E(U_t U_t') = \Sigma$

²¹SBIC は $SBIC(p) = \ln|\hat{\Sigma}| + 2n(np+1)\frac{\ln T}{T}$ と定義される。 p はモデルの次数、 $\hat{\Sigma}$ は錯乱項の分散共分散行列の推定値、 n は VAR モデルの次元、そして T はデータ数を表わしている。

表 5.9: VAR モデル計結果

説明変数	Equations			Equations			
	$LNEY_t$	$LNUY_t$	ΔLNI_t	$LNEY_t$	$LNUU_t$	ΔLNI_t	
$LNEY_{t-1}$	3.29 (36.93)	221.59 (5.49)	5.93 (1.20)	$LNEY_{t-1}$	3.31 (40.3)	-35.26 (-0.7)	6.87 (1.6)
$LNEY_{t-2}$	-4.19 (-17.63)	-527.00 (-4.89)	-17.44 (-1.32)	$LNEY_{t-2}$	-4.34 (-19.4)	108.54 (0.8)	-19.62 (-1.6)
$LNEY_{t-3}$	2.48 (10.73)	449.43 (4.29)	20.68 (1.61)	$LNEY_{t-3}$	2.69 (12.1)	-127.34 (-1.0)	21.67 (1.8)
$LNEY_{t-4}$	-0.58 (-6.98)	-142.40 (-3.80)	-9.13 (-1.99)	$LNEY_{t-4}$	-0.67 (-8.4)	55.03 (1.2)	-8.90 (-2.1)
$LNUY_{t-1}$	0.0001 (0.32)	0.86 (7.95)	0.01 (0.95)	$LNUU_{t-1}$	-9.E-08 (-0.0005)	1.05 (9.5)	-0.01 (-0.5)
$LNUY_{t-2}$	-0.0004 (-1.33)	-0.62 (-4.35)	-0.03 (-1.49)	$LNUU_{t-2}$	1.E-04 (0.4)	-0.51 (-3.2)	0.002 (0.1)
$LNUY_{t-3}$	-0.0001 (-0.36)	0.28 (1.94)	0.02 (1.04)	$LNUU_{t-3}$	-7.E-06 (-0.03)	0.07 (0.4)	0.01 (0.4)
$LNUY_{t-4}$	0.0003 (1.40)	-0.19 (-1.70)	-0.01 (-0.88)	$LNUU_{t-4}$	-1.E-05 (-0.1)	0.02 (0.2)	-0.001 (-0.1)
ΔLNI_{t-1}	-0.002 (-0.98)	-0.57 (-0.76)	-0.09 (-0.99)	ΔLNI_{t-1}	-1.E-03 (-0.6)	0.72 (0.7)	-0.11 (-1.2)
ΔLNI_{t-2}	-0.004 (-2.40)	0.35 (0.48)	0.19 (2.08)	ΔLNI_{t-2}	-4.E-03 (-2.2)	-0.31 (-0.3)	0.20 (2.1)
ΔLNI_{t-3}	-0.002 (-0.96)	0.37 (0.49)	0.02 (0.26)	ΔLNI_{t-3}	-2.E-03 (-1.0)	1.20 (1.1)	0.07 (0.7)
ΔLNI_{t-4}	-0.0007 (-0.45)	0.95 (1.26)	-0.48 (-5.26)	ΔLNI_{t-4}	-1.E-03 (-0.7)	1.34 (1.3)	-0.47 (-5.0)
Const.	0.58 (1.01)	-887.84 (-3.42)	-29.61 (-0.93)	Const.	0.88 (1.7)	-526.83 (-1.7)	-19.60 (-0.7)

$Cov(U_t, U'_s) = E(U_t U'_s) = 0$ ($\forall t, s \in \Lambda; t \neq s$) といった3つの性質を満たすと仮定する²²。さて、(5.18)式は1期前にも成立するので、

$$Y_{t-1} = \Phi_1 Y_{t-2} + \Phi_2 Y_{t-3} + \dots + \Phi_p Y_{t-p-1} + U_{t-1} \quad (5.20)$$

を得る。従って、(5.20)式を用いて(5.18)式は次のように書き直すことができる。

$$Y_t = \Phi_1(\Phi_1 Y_{t-2} + \Phi_2 Y_{t-3} + \dots + \Phi_{t-p-1} + U_{t-1}) + \Phi_2 Y_{t-2} + \dots + \Phi_p Y_{t-p} + U_t \quad (5.21)$$

同様に Y_{t-m} ($m = 2, 3, \dots$) について逐次代入をしていくと、(5.18)式は

$$Y_t = \sum_{n=2}^{\infty} \Phi_1^n U_n \quad (5.22)$$

となる。定常性の条件が満たされているならば、十分大きな m に関する Y_{t-m} の係数は0に収束するからである。 U_{t-m} の係数行列を $-\Psi = -[\psi_{m,ij}]$ とすると、(5.22)式は

$$y_t = \Psi_0 U_t - \Psi_1 U_{t-1} - \dots - \Psi_n U_{t-m} - \dots \quad (5.23)$$

とまとめることができる。ここで、 Ψ_0 は m 次の正方行列である ($\Psi_0 = I$)。

インパルス応答関数 (Impulse Response Function) は、この $VMA(\infty)$ 表現から求められる。インパルス応答関数とは、過去の錯乱項の影響が各変数にどのように波及していくかを捉えようとするものである²³。計測を行う際には、全ての内生変数と定数項が初期においては0であるということを仮定する。そして、ある t 期の錯乱項ベクトル U_t が $[0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0]'$ となり、その他の時点では零ベクトルである場合を想定する。こうして、ベクトル U_t が時間を通じて第 i 変数に与える効果、すなわちを記録すると y_i のインパルスに対する y_j の応答関数

$$\psi_{0,ij}, -\psi_{1,ij}, -\psi_{2,ij}, -\psi_{3,ij}, \dots \quad (5.24)$$

を得る²⁴。 Ψ_m の第 (i, j) 要素は、 t 時点に起きた第 j 変数のインパルスが引き起こす第 i 変数に対する $t + m$ 時点における影響 $\partial y_{t+m,i} / \partial u_{t,i} = \psi_{ij}(m)$ なのである。 n 変数モデルでは、全体として n^2 種類のインパルス応答関数が求められる。

²²一般には、錯乱項の同時点における相関は0ではないので、 Σ は非対角行列である。

²³具体的な計測結果とその分析は次節で行っている。

²⁴この方法は、攪乱項が瞬時的に無相関 (すなわち Σ が対角行列) の場合には問題ないのだが、そうでない場合にはコレスキー分解を行う必要がある。ただし、残差間の相関係数が十分0に近くない場合は変数の並べ方によって結果が異なり、その頑健性に問題が発生する。

分析結果と考察

推計した VAR モデルに基づき、各変数についてインパルス応答関数を計算した²⁵。計測結果（付録 12 参照）より、不確実性予測値の増大が投資を抑制する効果を持つこと、売上予測値の上昇が投資を促進することが明らかとなった。なお、これらの結果はモデル 2 においてより顕著にみることができる。またモデル 2 では、ある変数のショックに対する不確実性と投資のインパルス応答関数に対照性が明確にみられる。不確実性の代理変数としては、LNUU が適切であることを示唆している。VAR モデル 1 に基づく計測結果は付録 12 の図 5.1 から図 5.9 までに示されている。また、VAR モデル 2 については同じく付録 12 の図 5.10 から図 5.18 に示されている。以下、具体的に説明する。

売上予測値のインパルス応答関数からは、売上予測値自身におけるショックの影響は、正の効果を保ったまま収束へと向かう（図 5.1, 図 5.10）。不確実性のショックの影響は、モデル 1 では概ね負の効果をもつ（図 5.2）、モデル 2 では概ね正の影響を与えている（図 5.11）。投資ショックの影響は、負の効果をもって現れる（図 5.3, 図 5.12）。不確実性予測値のインパルス応答関数からは次のことが言える。売上予測値のショックの影響は、5 期までの動きが両モデル間で異なっているが²⁶、累積効果については両モデルにおいて正になっている（図 5.4, 図 5.13）。不確実性自身のショックの影響は、不確実性を上下させる影響を与える。モデル 2 における第 1 期の影響はモデル 1 のものと比べて大きい、収束は早い（図 5.5, 図 5.14）。投資のショックの影響は、第 9 期までにおいて異なっている。VAR モデル 1 においては負の効果をもって現れているが（図 5.6）、VAR モデル 2 においては正の効果をもって現れている（図 5.15）。

投資のインパルス応答関数については、次のことが言える。売上予測値ショックの影響は初期には正の効果として現れ、後に負の効果となっている（図 5.7, 5.16）。不確実性予測値のショックの影響は、モデル 1 では、正負の効果が不規則に入り混じる形で現れるが、累積的な影響としては負の効果がある（図 5.8）。一方、モデル 2 では不確実性のショックの影響は、初期においては負の効果を持つが、後に正の効果に転じている（図 5.17）。投資自身のショックは、企業の投資行動に混乱をもたらしている（図 5.9, 5.18）。

²⁵ コレスキー分解を行ったが、残差間の相関係数が十分 0 に近いいため頑健性は保持されている。

²⁶ 両モデルにおいて過去の値のもたらす効果の違いによる。

おわりに

本章では、不確実性と企業の主観的期待、そして投資行動との関係について第4章の理論分析を基に定式化し、実証分析を試みた。不確実性の増大が企業の投資行動に与える抑制効果をインパルス応答関数により明らかにした。また、次期に関する企業の売上予測値の上昇が、投資を促進する効果についても実証的に明らかにした。

不確実性の代理変数としては、先行研究でも多く用いられている分散を用いた。その際、分散を計算する元のデータにトレンドがある場合には、分散が必ずしも不確実性を反映しない可能性を指摘した。そして、トレンドを除去したデータに基づく分散を用いたモデルをも推定し、そのパフォーマンスを比較した。結果としては、概ね同様の動きを記録しているものの、トレンドを除去したデータに基づく分散を用いた場合の方が、不確実性と投資との間に成立する明確な関係を示していることが分かった。このことから、トレンドを含むデータから作成した分散は、必ずしも適切な不確実性の代理変数ではないという結論が得られた。

本章は、全体として時系列分析における定常過程の重要性を主張する構成となっている。時系列分析における変数の満たすべき定常性について、定義や理論的主張のみに留まることなく、非定常過程を用いた分析を実際に行い、その問題点を明らかにした。時系列分析を行う場合には、必ず変数の定常性を確かめ、非定常的変数については基本的に定常化することが不可欠であることを確認した。

以上、本章は 不確実性と設備投資 不確実性の代理変数 時系列分析と定常過程の3つの論題について議論した。これらは、分析目的に応じて適切な分析手法を用いて議論するという、研究の基礎を成す事柄である。本稿の課題である不確実性と投資行動の分析に加えて、表現法や手法に十分な注意を払っている点で、本章の議論はより有意義なものとなっていると考えている。

Appendix

AR(p) モデルの定常性の条件が p 次の定差方程式の解の安定性条件に一致することを証明する。一般性を失うことなく、 $p=2$ で証明する。次の AR(2) モデル

$$y_t = \alpha y_{t-1} + \beta y_{t-2} \quad (5.25)$$

について考える。ここで、 $y_{t+1} \equiv x_t$ とすると、(5.25) 式の関係は2期後についても成

立しているので

$$\begin{bmatrix} x_{t+1} \\ y_{t+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_t \\ y_t \end{bmatrix} \quad (5.26)$$

を得る。係数行列を A とすると、固有方程式は

$$|A - \lambda I| = \lambda^2 - \alpha\lambda - \beta = 0 \quad (5.27)$$

となる。ここで、 $\nu \equiv \frac{1}{\lambda}$ とおくと、 $p = 3$ の (5.10) 式を導くことができる。さて、(5.25) 式で与えられたシステムが安定であるならば、(定数項が無いので) $\lim_{t \rightarrow \infty} y_t = 0$ が成立する。定差方程式の解は、 $\mathcal{A}_i (i = 1, 2, 3)$ を初期値によって決定される未定数とすると

$$y_t = \mathcal{A}_1 \lambda^t + \mathcal{A}_2 \lambda^t + \mathcal{A}_3 \lambda^t \quad (5.28)$$

と表される。従って、定差方程式の安定性の条件は $|\lambda_i| < 1 (\forall i)$ である²⁷。 $\nu \equiv \frac{1}{\lambda}$ であったから、安定性の条件は $|\nu_i| > 1 (\forall i)$ と同値である。(証明おわり)

²⁷ここで $\mathcal{A}_i = 0 (\forall i)$ となる場合については考えない。

第6章 政策的インプリケーション

将来における不確実性は、設備投資に影響を与える重要な決定要因の1つである。本稿では、不確実性下における企業の投資行動について、歴史的・理論的・計量的・政策的分析を行った。第2章では、代表的な企業環境変化である景気循環が不確実性という特性を有していることを歴史的観点から確認した。景気循環の周期には一定の周期が存在するという議論があるが、その「様式化された事実」に必然性はなく、むしろ歴史的要因に依存した偶然的事実であった。いくつかの実証的研究によって、景気循環の周期が確率的なものであることは示されている。企業環境変化のタイミングは確率的なものとして扱われるべきである。現実の企業が設備投資を行う際に、将来の不確実性を十分考慮しているという点からも、投資決定における不確実性投資行動への影響の重要性を確認した。旧経済企画庁のアンケート調査によると、企業の期待収益や将来に関する不確実性を反映する「内外の需要動向」が最重要視される決定要因であった。

第3章、第4章では「いつ景気がよくなるのか」という現実企業の声を基に、企業環境変化のタイミングの不確実性と投資行動に関する理論分析を行った。この問題は、第2章の歴史的考察を反映するものでもある。第3章では、動学問題の扱い方やタイミングの不確実性の数学的記述、そして基本モデルの構築といった理論分析の基礎について議論した。1度限りの企業環境変化の生起がポアソン過程に従う時、変化が実現するまでの待ち時間は指数分布に従う。繰り返し起きる企業環境変化の生起がマルコフ過程に従う時にも、やはり待ち時間は指数分布に従う。これらの特性を用いて企業環境変化のタイミングに関する不確実性を記述したのであった。第4章では、第3章を基にタイミングの不確実性と設備投資行動を解析的に分析した。また、タイミングの確率構造に関する企業の主観的認識が異なっている場合の設備投資行動について数値解析を行った。いわゆる、主観的分布と客観的分布の乖離に関する議論である。

1度限りの企業環境変化を考慮するモデルからは、企業環境変化までの平均的待ち

時間が短いほど変化後の状態を重視する投資行動となることが示された。また、待ち時間が短いほど資本の動学的限界価値の変化に対し、最適資本水準を弾力的に変更することも示された。繰り返し起きる企業環境変化のタイミングに関する不確実性を考慮するモデルでは、投資の非可逆性を明示的に加味した。投資の非可逆性は、近年の日本経済における過剰設備問題からも示唆される性質である。このモデルから、状態 L に切り替わるまでの待ち時間が短いほど状態 H における最適資本水準が低いこと、そしてその水準が弾力的に変更されることを示した。また、状態 H までの待ち時間が短いほど状態 L が軽視され、資本調整スピードが低下することを示した。この時、状態 H における最適資本水準は高くなる。主観的分布と客観的分布の乖離の問題については、数値解析的に分析を行った結果、企業の事前的最適化行動は往々にして適切ではないということが確認された。予測誤差が拡大し、その分増大する調整費用を企業が負うことになる。

第 5 章では、不確実性と設備投資行動に関する実証的分析を行った。まず、分析の基礎となるオプション理論について説明を行った。そして、第 3 章で提示した基本モデルから、不確実性と企業の主観的期待、そして投資行動を用いた VAR モデルを定式化し、推定した。インパルス応答関数を用いて、不確実性の増大が企業の投資行動に与える抑制効果、次期に関する企業の売上予測値の上昇が投資を促進する効果などを、実証的に明らかにした。また、時系列分析における定常過程の重要性についての議論も行っている。時系列分析を行う場合には、変数の定常性に対して十分な注意を払う必要があることを確認した。なお、不確実性の代理変数としては分散を用いたが、トレンドを含むデータから作成した分散は、必ずしも適切な不確実性の代理変数ではないという点を指摘している。

本稿の政策的インプリケーションを、平成不況以降の日本経済に適応すると、次のように議論することが出来る。1990 年代以降の日本では大量の企業が相次いで倒産し、過去に無い高い失業者が発生している。また、不良債権処理が叫ばれる一方で貸し渋り・貸し剥がしが広く行われ、消費や投資も低迷を続けている。これらの実情を考慮すると、適切な政策などで好景気に転ずるまでの待ち時間は十分に長いものと予想される。本稿の分析によると、個別企業が景気の好転に関するタイミングが極めて不確実であると考えている場合、合理的企業は十分 1 に近いウェイトで不景気の現状を評価するため、投資水準は一向に上向かないということになる。この結論は日本の

現状と整合的であり、推論は妥当である。従って、日本経済の活性化に2つの政策が必要であると提言することが出来る。1つは、確実に効果が上がる経済政策を立ち上げ、それを経済主体に確信させることである。もう1つは、景気の悪転を防ぐような政策を敷き、状態Lまでの待ち時間を十分長期化させることである。これらの政策は企業の積極的な投資行動を促し、日本のマクロ経済を活性化させることになる。

あとがき

私の主たる関心事は時に応じて変化してきたが、好奇心に基づくという点では共通している。小学校の頃には宿題さえも忘れて飛び回っていた私だが、中学生の頃から学校で新しいこと学ぶこと、一生懸命になって考えることが面白くなった。大学で経済学を学ぶことを決めたのは、日本史から人間の群像が見えた時であった。高校生だった私は、時代を遡っても共通する人間の姿や経済に強い興味を抱いたのである。そして、本校の経済学部に入學し、経済学に没頭する日々を送り今に至るのである。

この卒業論文の作成中、私は大学卒業後も経済学を続けることを決心した。研究職についての厳しい就職状況を覚悟した上での果敢なる挑戦である。動植物を見つけては夢中になり、遊びを考えては友達と駆け回っていた頃と同様の好奇心が、「童心」が騒いだためである。そもそも、私が経済学に夢中となってしまった端緒は、経済原論（ミクロ経済学）で永谷敬三先生に課された問題であった。

「義務教育には引換券（Voucher）形式で、高等教育には補助金形式での教育奨励が行われているが、その理由を経済学的に説明しなさい。」

昼夜を問わぬ奮闘の末、この問題が解けた瞬間の興奮を忘れることは出来ない。無機的に見えていた数式から有意味な直感的解が導かれたことに、感動が止まらなかった。興奮のあまり、不必要なまでに詳細な解答を作成したことを覚えている。経済原論の授業を通じて受け取った「経済学を使うために学びなさい」というメッセージは、私の基本的姿勢となっている。卒業論文にも、身近な経済現象を経済学を用いて説明したいという思いをもって取り組んだ。

本稿の出発点は、設備投資を行う全ての実務家が「いったい日本はいつ景気がよくなるのか？」という疑問を抱いている点であった。企業が設備投資を決定する際、将来の景気の動向は最も重要な指標の1つであり、この期待によって、企業の投資量が決定されると言っても過言ではない。また、実務家の話す設備投資は、テキストで学んだ基本的な企業の設備投資モデルとは異なるものであり、そのまま適用し考察することはできなかった。リスクとリターンを睨んだ意思決定、急成長を遂げる成功企業と売上低迷や設備投資の失敗から倒産する企業。このような設備投資問題に携わっている人々にも「興味深い」と言ってもらえるような議論を展開したいと思い、問題意識を定めたのである。

“興味深い”論文の作成は予想以上の困難を伴った。サーベイに基づくアイデアではない上、私自身の知識が乏しく、定式化の階段から問題は多かった。また、定式化完了後も技術的に高い壁が存在し、数ヶ月間に及ぶ施行錯誤を続けた。何冊もの本を読み、同じ性質の問題を扱う他分野の論文を多く読み、様々な計算方法を試みた。今から思えば、解ける保証の無い問題に対する無謀なる挑戦であったと思う。

この卒業論文の作成に当たっては、多くの方々のお世話になった。この卒業論文は、多くの方々から頂いた御厚意と私自身の努力との結晶であると思っている。ゼミの指導教授である山口三十四先生には、異なる分野に進もうとする筆者に対して学問に対する姿勢や厳しさを教えて頂いた。様々な形でお世話になったことに、心から感謝の意を表したい。また、三野和雄先生には大変お世話になった。まとまりのない構想にも耳を傾け、理解して幾つもの文献を紹介して下さい、本当に感謝している。

2003年1月

藤本 真智子

参考文献

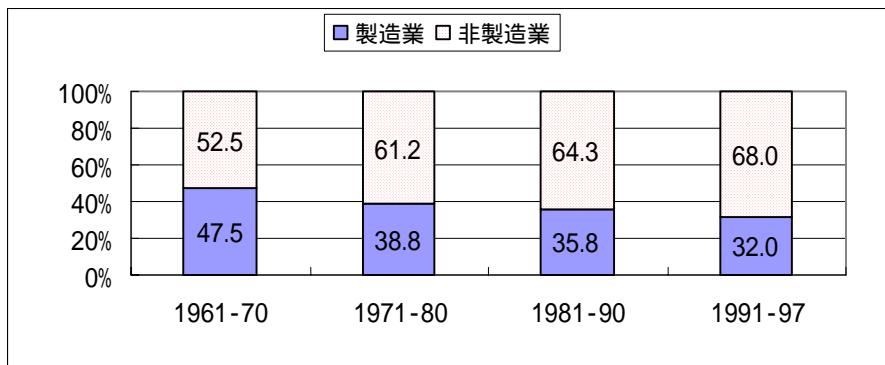
- [1] A.Drazen and E.Helpman(1987)“ Stabilization with Exchange Rate Management ”, *Quarterly Journal of Economics*, Vol.11, pp.835-855.
- [2] A.Dixit(1991) *to Economic Theory*, Oxford Univ Press:London.
- [3] D.Romer(1996) *Advanced Macroeconomics* McGraw-Hill Companies:New York.
- [4] F.Hayashi(2001) *Econometrics*, Princeton University Press :Princeton, pp.97-105, 365-399, 557-562.
- [5] G.Saint-Paul(1996) *Dual Labor Markets; A Macroeconomic Perspective*, MIT Press:Cambridge.
- [6] J.Hamilton(1994) *Time Series Analysis*, Princeton University Press:Princeton, pp.291-323.
- [7] J.Pitchford(1989)“ Optimum Borrowing and the Current Account when there are Fluctuations in Income ”, *Journal of International Economics*, Vol.26, pp.345-358.
- [8] M.Cropper(1977)“ Health, Investment in Health, and Occupational Choice ”, *The Journal of Political Economics*, Col.185, Issue6, pp.1273-1294.
- [9] M.Kamien, N.Schwartz(1991) *Dynamic Optimization*, Elsevier Science Ltd :New York, pp.259-263.
- [10] P.Dasgupta, J.Stiglitz(1981)“ Resource Depletion Under Technological Uncertainty ”, *Econometrica*, Vol.49, Issue1, pp.85-104.

- [11] R.Pindyck(1982)“ Adjustment Costs,Uncertainty,and the Behavior of the Firm ”,*The American Economic Review*,Vol.72,Issue3,415-427.
- [12] S.Hamori,N.Hamori(2000)” An empirical analysis of economic fluctuations in Japan:1885-1940” ,*Japan and the World Economy*,Vol.12,pp.11-19.
- [13] S.Nickell(1977)“ Uncertainty and Lags in the Investment Decisions of Firms ”,*The Review of Economic Studies*,Vol.44,No.2,pp.249-263.
- [14] S.Nickell(1978)*The Investment Decisions of Firms*,Cambridge University Press:Oxford.
- [15] S.Solomou(1998)*Economic Cycles*,Manchester University Press:Manchester.
- [16] 小和田 正 (1983) 『確率過程とその応用』 中央出版。
- [17] 北坂 真一 (1993) 「日本経済における構造変化と景気変動」 『The Economic Studies Quarterly』 第44巻第2号,142-158頁。
- [18] 経済企画庁 (1999) 『年次経済報告』 経済安定本部。
- [19] 鈴木 和志 (2001) 『設備投資と金融市場』 東京大学出版会。
- [20] 直木 孝次郎、他11名 (1998) 『日本史B』 実教出版。
- [21] 中村 保 (1999) 「近年の投資理論の展開」 『山口経済学雑誌』 第47巻第2号 , 351-373頁。
- [22] 中村 保 (1999) 「不確実性下の投資決定：展望論文」 『山口経済学雑誌』 第47巻第3号 , 41-60頁。
- [23] 西村 清彦 (1990) 『経済学のための最適化理論入門』 東京大学出版会。
- [24] 羽森 茂之 (2000) 『計量経済学』 中央経済社。
- [25] 伴 金美 (1991) 『マクロ計量モデル分析：モデル分析の有効性と評価』 有斐閣。
- [26] 伏見 正則 (1987) 『確率と確率過程』 講談社。

- [27] 山本 拓 (1992) 「時系列分析と経済分析への応用」 『フィナンシャル・レビュー』
第 23 号, 大蔵省財政金融研究所, 1-24 頁。
- [28] 渡辺 隆一 (1979) 『マルコフ・チェーン』 共立出版株式会社。
- [29] 財務省 『法人企業統計調査』, <http://www.mof.go.jp/ssc/kihou.htm>.
- [30] 日本銀行調査統計局 『金融経済統計月報』, <http://www.boj.or.jp/down/dlong-f.htm>.

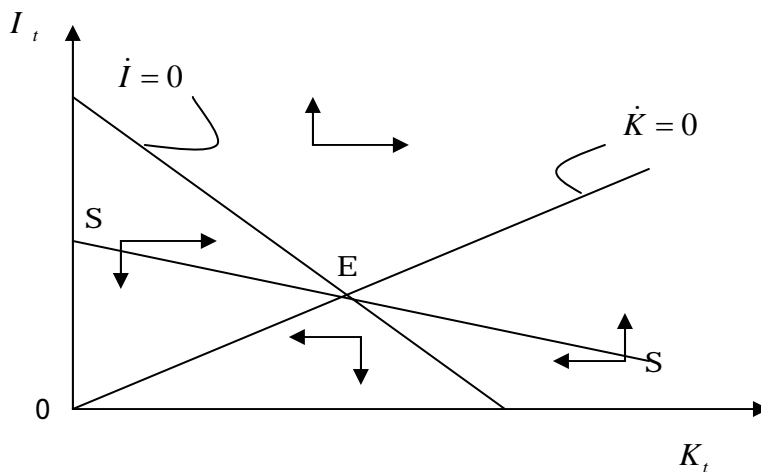
付録

付録1 全産業設備投資における産業別構成

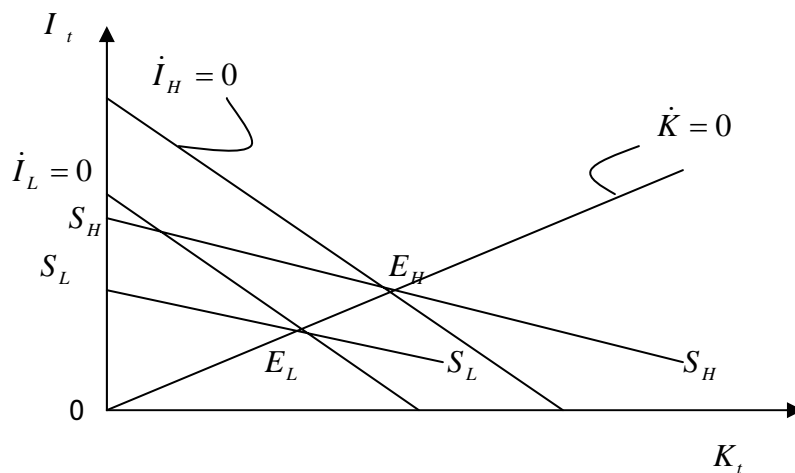


注) 鈴木和志『設備投資と金融市場』掲載データより作成

付録2 位相図と鞍点経路



付録3 位相図と鞍点経路 (2状態)



注) 時点 T までは状態 L、時点 T 以降は状態 H のシステムに従う。

付録4 Fortran プログラム

(作成者：佐々木康憲氏)

```

integer seed(2), N, m, mm
real b, c1, c2, rH, rL, zH, zL, eL, eH, dt, TT
REAL V, PI, K(2), r, r2, e, z, c, T
CHARACTER STATE
T=0
r=1
open(2,file='parameter.txt')
read(2,*) state, k(1)
read(2,*) b, c1, c2
read(2,*) rH, zH, eL
read(2,*) rL, zL, eH
read(2,*) dt
read(2,*) TT

N=int(TT/dt)
eL=eL/dt
eH=eH/dt

IF(STATE.EQ.'L') THEN
    e=eH
    z=zL
    r2=rL
ELSE
    e=eL
    z=zH
    r2=rH
ENDIF

OPEN(1,FILE='RESULT.CSV')
WRITE(1,*) 'T K PI STATE'

write(6,*)
read(5,*) seed(1)
CALL CHANGE(e,seed(1),seed(2),m)
mm=mm+m
seed(1)=seed(2)
WRITE(6,*) '          MM          M          SEED'
WRITE(6,*) MM,M,SEED(1)

DO I=1,N

    IF(I.EQ.mm) THEN

```

```

        IF(STATE.EQ.'L') THEN
            STATE='H'
            e=eL
            z=zH
            r2=rH
        ELSE
            STATE='L'
            e=eH
            z=zL
            r2=rL
        ENDIF
        CALL CHANGE(e,seed(1),seed(2),m)
        mm=mm+m
        seed(1)=seed(2)
        WRITE(6,*) MM,M,SEED(1)
    ENDF

    r=r*(1+r2)

    IF(K(1).LT.z/b) THEN
        c=c1
    ELSE
        c=c2
    ENDF

    K(2)=(z+c*K(1))/(b+c)
    PI=(z**2.0/(2.0*b)-b*c/(2*(b+c))*(K(1)-z/b)**2.0)*dt

    V=V+PI/r
    T=T+dt

    k(1)=k(2)

    WRITE(1,*) T, K(1), PI, STATE

ENDDO

WRITE(1, '(1X,A,1X,F10.4)') 'Maximized Value Function=', V

CLOSE(1)
CLOSE(2)

END

```


*****遷移決定サブルーチン*****

```

SUBROUTINE CHANGE(e,idum1,idum2,ran2)
INTEGER idum1, idum2, IA, IM, IQ, IR, MASK, ran2
REAL ran, AM, e
PARAMETER
(IA=16807,IM=2147483647,AM=1./IM,IQ=127773,IR=2836,MASK=123459876)
INTEGER k

idum1=ieor(idum1,MASK)
k=idum1/IQ
idum1=IA*(idum1-k*IQ)-IR*k
if (idum1.lt.0) idum1=idum1+IM
ran=AM*idum1
idum2=ieor(idum1,MASK)

ran2=int(-e*log(ran))+1

return

END

```

*****Parameter (一例)*****

L	0	
2	0	0.7
0.05	8	15
0.02	5	15
1		
120		

*****フォーマット*****

- 1 行目・・・初期状態(好況:H、不況:L)、最初の資本ストック
- 2 行目・・・b,c1(投資が正のときのc),c2(投資が負のときのc)
- 3 行目・・・好況のときの利子率 rH、需要パラメータ zH、不況に転移するまでの平均時間 eL
- 4 行目・・・不況のときの利子率 rL、需要パラメータ zL、好況に転移するまでの平均時間 eH
- 5 行目・・・計算のタイムステップ dt
- 6 行目・・・予測期間 T

付録5 数値計算結果(1)

STATE	K(c=0.7)	(c=0.7)	STATE	K(c=0.7)	(c=0.7)
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
L	2.5	6.3	H	4	16
L	2.5	6.3	H	4	16
L	2.5	6.3	L	2.9	5.7
L	2.5	6.3	L	2.6	6.2
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.2
L	2.9	5.7	L	2.5	6.2
L	2.6	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	H	4	16
L	2.5	6.3	H	4	16
H	4	16	H	4	16
H	4	16	H	4	16
L	2.9	5.7	H	4	16
L	2.6	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	L	2.9	5.7
L	2.5	6.2	L	2.6	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
L	2.9	5.7	L	2.5	6.3
L	2.6	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
L	2.9	5.7	H	4	16
L	2.6	6.2	H	4	16
L	2.5	6.2	L	4	16
L	2.5	6.2	L	2.9	5.7
L	2.5	6.2	L	2.6	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.2	L	2.5	6.2
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
L	2.5	6.3	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.2
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
L	2.9	5.7	L	2.5	6.3
L	2.6	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.3	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
H	4	16	L	2.5	6.3
L	2.9	5.7	L	2.5	6.3
L	2.6	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3
L	2.5	6.2	L	2.5	6.3

* Maximized Value Function(c=0.7)= 217.03

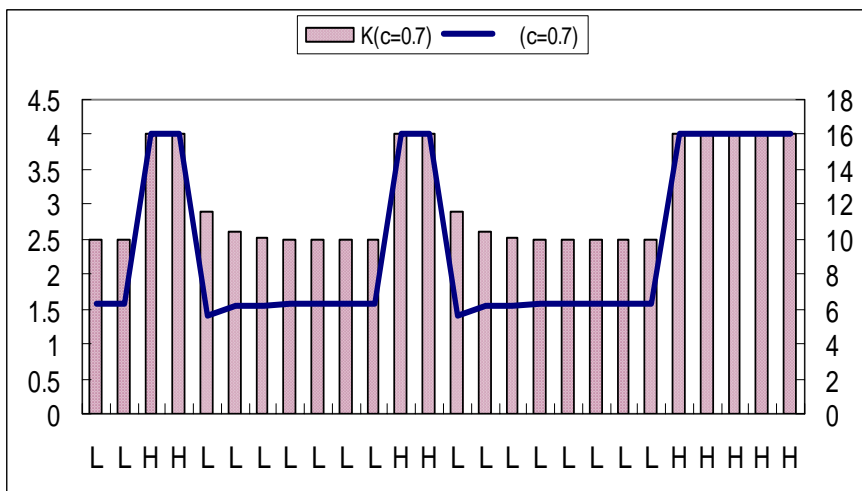
付録6 数値計算結果(2)

STATE	系列1		系列2		STATE	系列1		系列2	
	K(c=10)	(c=10)	K(c=100)	(c=100)		K(c=10)	(c=10)	K(c=100)	(c=100)
L	2.50	6.25	2.50	6.25	L	3.22	5.62	3.89	4.29
L	2.50	6.25	2.50	6.25	L	3.10	5.81	3.86	4.37
L	2.50	6.25	2.50	6.25	H	4	16	4	16
L	2.50	6.25	2.50	6.25	H	4	16	4	16
L	2.50	6.25	2.50	6.25	L	3.75	4.38	3.97	4.04
L	2.50	6.25	2.50	6.25	L	3.54	4.95	3.94	4.13
L	2.50	6.25	2.50	6.25	L	3.37	5.35	3.91	4.21
H	4	16.0	4	16	L	3.22	5.62	3.89	4.29
H	4	16.0	4	16	L	3.10	5.81	3.86	4.37
L	3.75	4.38	3.97	4.04	L	3.00	5.95	3.83	4.44
L	3.54	4.95	3.94	4.13	H	4	16	4	16
L	3.37	5.35	3.91	4.21	H	4	16	4	16
L	3.22	5.62	3.89	4.29	H	4	16	4	16
L	3.10	5.81	3.86	4.37	H	4	16	4	16
L	3.00	5.95	3.83	4.44	H	4	16	4	16
L	2.92	6.04	3.81	4.51	H	4	16	4	16
H	4	16	4	16	H	4	16	4	16
H	4	16	4	16	H	4	16	4	16
L	3.75	4.38	3.97	4.04	H	4	16	4	16
L	3.54	4.95	3.94	4.13	H	4	16	4	16
L	3.37	5.35	3.91	4.21	L	3.75	4.38	3.97	4.04
L	3.22	5.62	3.89	4.29	L	3.54	4.95	3.94	4.13
L	3.10	5.81	3.86	4.37	L	3.37	5.35	3.91	4.21
L	3.00	5.95	3.83	4.44	L	3.22	5.62	3.89	4.29
L	2.92	6.04	3.81	4.51	L	3.10	5.81	3.86	4.37
L	2.85	6.10	3.78	4.58	L	3.00	5.95	3.83	4.44
H	4	16	4	16	L	2.92	6.04	3.81	4.51
H	4	16	4	16	L	2.85	6.10	3.78	4.58
H	4	16	4	16	L	2.79	6.15	3.76	4.64
H	4	16	4	16	L	2.74	6.18	3.73	4.71
H	4	16	4	16	L	2.70	6.20	3.71	4.77
L	3.75	4.38	3.97	4.04	L	2.67	6.22	3.68	4.82
L	3.54	4.95	3.94	4.13	L	2.64	6.23	3.66	4.88
L	3.37	5.35	3.91	4.21	L	2.62	6.23	3.64	4.93
H	4	16	4	16	L	2.60	6.24	3.61	4.98
H	4	16	4	16	L	2.58	6.24	3.59	5.03
H	4	16	4	16	L	2.57	6.24	3.57	5.08
L	3.75	4.38	3.97	4.04	L	2.56	6.25	3.55	5.12
H	4	16	4	16	H	4	16	4	16
H	4	16	4	16	H	4	16	4	16
L	3.75	4.38	3.97	4.04	H	4	16	4	16
L	3.54	4.95	3.94	4.13	L	3.75	4.38	3.97	4.04
L	3.37	5.35	3.91	4.21	L	3.54	4.95	3.94	4.13
L	3.22	5.62	3.89	4.29	L	3.37	5.35	3.91	4.21
L	3.10	5.81	3.86	4.37	L	3.22	5.62	3.89	4.29
L	3.00	5.95	3.83	4.44	L	3.10	5.81	3.86	4.37
L	2.92	6.04	3.81	4.51	L	3.00	5.95	3.83	4.44
L	2.85	6.10	3.78	4.58	L	2.92	6.04	3.81	4.51
H	4	16	4	16	L	2.85	6.10	3.78	4.58
H	4	16	4	16	L	2.79	6.15	3.76	4.64
H	4	16	4	16	L	2.74	6.18	3.73	4.71
H	4	16	4	16	L	2.70	6.20	3.71	4.77
H	4	16	4	16	L	2.67	6.22	3.68	4.82
H	4	16	4	16	L	2.64	6.23	3.66	4.88
H	4	16	4	16	L	2.62	6.23	3.64	4.93
H	4	16	4	16	L	2.60	6.24	3.61	4.98
L	3.75	4.38	3.97	4.04	L	2.58	6.24	3.59	5.03
L	3.54	4.95	3.94	4.13	L	2.57	6.24	3.57	5.08
L	3.37	5.35	3.91	4.21	L	2.56	6.25	3.55	5.12
L	3.22	5.62	3.89	4.29	L	2.55	6.25	3.53	5.17

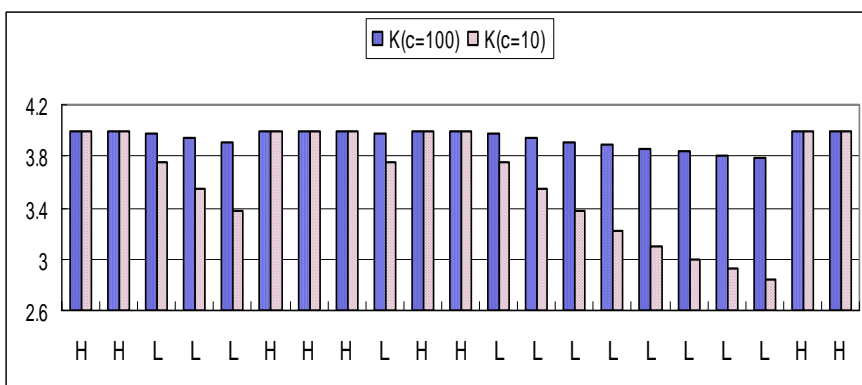
* Maximized Value Function(c=10)= 208.56

* Maximized Value Function(c=100)= 196.24

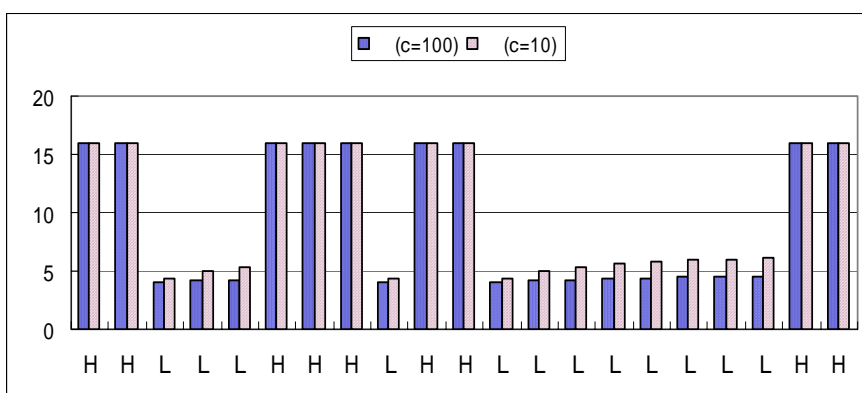
付録7 数値計算結果 (1例)



付録8 資本ストックの動きの比較



付録9 利潤の動きの比較



付録 10 統計データ一覧 (1)

	投資	投資階差	売上予測値		投資	投資階差	売上予測値
	lnI(t)	lnI(t)	lnEY		lnI(t)	lnI(t)	lnEY
1974q3	5.29			1987q3	5.63	-0.01	8.85
1974q4	5.27	-0.02		1987q4	5.64	0.01	8.88
1975q1	5.23	-0.03		1988q1	5.71	0.07	8.91
1975q2	5.30	0.06	8.23	1988q2	5.62	-0.09	8.93
1975q3	5.23	-0.07	8.24	1988q3	5.65	0.03	8.96
1975q4	5.20	-0.03	8.25	1988q4	5.68	0.03	8.98
1976q1	5.19	-0.01	8.28	1989q1	5.77	0.09	8.99
1976q2	5.03	-0.16	8.30	1989q2	5.71	-0.06	9.01
1976q3	5.08	0.04	8.32	1989q3	5.77	0.05	9.02
1976q4	5.07	-0.008	8.34	1989q4	5.84	0.07	9.03
1977q1	5.08	0.01	8.36	1990q1	5.88	0.04	9.04
1977q2	5.14	0.06	8.37	1990q2	5.94	0.06	9.05
1977q3	5.13	-0.01	8.39	1990q3	6.03	0.09	9.05
1977q4	5.13	-0.0003	8.40	1990q4	6.03	0.00	9.05
1978q1	5.07	-0.07	8.41	1991q1	6.08	0.05	9.05
1978q2	5.08	0.01	8.42	1991q2	6.10	0.02	9.05
1978q3	5.03	-0.05	8.43	1991q3	6.15	0.05	9.05
1978q4	5.05	0.02	8.44	1991q4	6.14	0.00	9.05
1979q1	5.04	-0.01	8.45	1992q1	6.14	0.00	9.05
1979q2	4.97	-0.07	8.47	1992q2	6.17	0.03	9.05
1979q3	4.99	0.03	8.50	1992q3	6.13	-0.04	9.05
1979q4	4.99	0.003	8.52	1992q4	6.11	-0.01	9.05
1980q1	5.01	0.02	8.53	1993q1	6.10	-0.01	9.05
1980q2	5.06	0.05	8.55	1993q2	6.06	-0.04	9.05
1980q3	5.10	0.03	8.55	1993q3	5.99	-0.07	9.05
1980q4	5.17	0.08	8.56	1993q4	5.98	-0.01	9.05
1981q1	5.24	0.07	8.56	1994q1	5.84	-0.15	9.05
1981q2	5.28	0.04	8.57	1994q2	5.90	0.07	9.05
1981q3	5.31	0.02	8.59	1994q3	5.84	-0.06	9.05
1981q4	5.32	0.02	8.61	1994q4	5.87	0.03	9.05
1982q1	5.34	0.02	8.62	1995q1	5.82	-0.05	9.05
1982q2	5.19	-0.15	8.62	1995q2	5.82	-0.01	9.05
1982q3	5.22	0.03	8.62	1995q3	5.83	0.01	9.05
1982q4	5.17	-0.05	8.62	1995q4	5.79	-0.04	9.05
1983q1	5.19	0.01	8.62	1996q1	5.92	0.13	9.05
1983q2	5.35	0.16	8.62	1996q2	5.63	-0.29	9.05
1983q3	5.35	0.005	8.64	1996q3	5.65	0.02	9.05
1983q4	5.39	0.03	8.66	1996q4	5.62	-0.03	9.05
1984q1	5.37	-0.01	8.68	1997q1	5.61	-0.01	9.05
1984q2	5.35	-0.02	8.71	1997q2	6.00	0.39	9.05
1984q3	5.37	0.02	8.73	1997q3	5.97	-0.03	9.05
1984q4	5.38	0.01	8.75	1997q4	6.06	0.09	9.05
1985q1	5.46	0.08	8.77	1998q1	6.06	0.00	9.05
1985q2	5.66	0.21	8.78	1998q2	5.91	-0.15	9.05
1985q3	5.69	0.03	8.80	1998q3	5.95	0.04	9.05
1985q4	5.75	0.05	8.81	1998q4	5.92	-0.03	9.05
1986q1	5.73	-0.01	8.82	1999q1	5.83	-0.10	9.05
1986q2	5.52	-0.21	8.82	1999q2	5.73	-0.09	9.05
1986q3	5.48	-0.04	8.81	1999q3	5.68	-0.06	9.05
1986q4	5.46	-0.02	8.81	1999q4	5.74	0.06	9.05
1987q1	5.42	-0.04	8.81	2000q1	5.69	-0.05	9.05
1987q2	5.64	0.22	8.82	2000q2	5.71	0.02	9.05

出所：財務省『法人企業統計』により作成。

付録 1 1 統計データ一覧 (2)

	不確実性予 測値	不確実性予測値 (トレンド除去済)	ダミー-1	ダミー-2		不確実性予 測値	不確実性予測値 (トレンド除去済)	ダミー-1	ダミー-2
	lnU	lnNTU	D1	D2		lnU	lnNTU	D1	D2
1974q3					1987q3	10.88	9.82	1	1
1974q4					1987q4	11.14	10.24	1	1
1975q1					1988q1	11.01	10.04	1	1
1975q2	6.19	7.31	0	0	1988q2	10.66	9.43	1	1
1975q3	8.14	6.67	0	0	1988q3	10.43	8.99	1	1
1975q4	9.24	8.29	0	0	1988q4	10.29	8.71	1	1
1976q1	9.54	8.67	0	0	1989q1	9.87	7.82	1	1
1976q2	9.33	8.26	0	0	1989q2	9.20	5.31	1	1
1976q3	8.84	7.19	0	0	1989q3	8.65	5.73	1	1
1976q4	8.59	6.35	0	0	1989q4	8.76	5.38	1	1
1977q1	8.55	5.97	0	0	1990q1	9.50	7.11	1	1
1977q2	8.55	5.73	0	0	1990q2	10.16	8.59	1	1
1977q3	8.48	5.12	0	0	1990q3	10.37	9.01	1	1
1977q4	8.17	4.14	0	0	1990q4	10.17	8.63	1	1
1978q1	7.58	6.00	0	0	1991q1	9.80	7.79	1	1
1978q2	7.15	6.64	0	0	1991q2	9.31	6.29	1	1
1978q3	7.68	6.12	0	0	1991q3	8.63	5.95	1	1
1978q4	8.56	5.15	0	0	1991q4	7.08	8.22	1	1
1979q1	9.20	6.94	0	0	1992q1	7.78	9.59	1	1
1979q2	9.55	7.72	0	0	1992q2	9.07	10.29	1	1
1979q3	9.68	7.96	0	0	1992q3	9.41	10.48	1	1
1979q4	9.56	7.62	0	0	1992q4	9.03	10.24	1	1
1980q1	9.06	6.47	0	0	1993q1	8.36	9.88	0	1
1980q2	7.91	7.19	0	0	1993q2	8.01	9.70	0	0
1980q3	5.76	8.35	0	0	1993q3	8.20	9.75	0	0
1980q4	4.69	8.54	0	0	1993q4	7.77	9.52	0	0
1981q1	7.55	7.79	0	0	1994q1	7.05	8.54	0	0
1981q2	9.05	6.58	0	0	1994q2	8.81	7.09	0	0
1981q3	9.64	7.39	0	0	1994q3	9.79	8.55	0	0
1981q4	9.40	6.92	0	0	1994q4	10.11	9.12	0	0
1982q1	8.19	7.80	0	0	1995q1	10.04	9.06	0	0
1982q2	6.10	9.14	0	0	1995q2	9.86	8.80	0	0
1982q3	7.18	9.66	0	0	1995q3	9.93	8.98	0	0
1982q4	6.75	9.51	0	0	1995q4	10.15	9.36	0	0
1983q1	7.02	8.72	0	0	1996q1	10.37	9.72	0	0
1983q2	8.69	6.77	0	0	1996q2	10.60	10.06	0	0
1983q3	9.60	6.95	0	0	1996q3	10.85	10.42	0	0
1983q4	10.05	8.18	0	0	1996q4	10.80	10.37	0	0
1984q1	10.21	8.52	0	0	1997q1	10.09	9.55	0	0
1984q2	10.14	8.35	0	0	1997q2	8.30	7.90	0	0
1984q3	9.91	7.73	0	0	1997q3	8.79	9.44	0	0
1984q4	9.71	7.00	0	0	1997q4	9.85	10.25	0	0
1985q1	9.61	6.56	0	0	1998q1	10.09	10.42	0	0
1985q2	9.64	6.67	0	0	1998q2	9.95	10.27	0	0
1985q3	9.54	6.21	0	0	1998q3	9.71	10.03	0	0
1985q4	8.86	6.89	0	0	1998q4	9.24	9.58	0	0
1986q1	7.31	8.93	0	0	1999q1	7.84	8.33	0	0
1986q2	7.53	9.84	0	0	1999q2	7.45	7.12	0	0
1986q3	8.09	10.07	0	0	1999q3	9.26	9.08	0	0
1986q4	7.16	9.64	0	0	1999q4	9.93	9.85	0	0
1987q1	8.58	8.30	1	0	2000q1	9.92	9.88	0	0
1987q2	10.11	8.47	1	1	2000q2	9.48	9.49	0	0

出所：財務省『法人企業統計』により作成。

付録 1 2 インパルス応答関数

売上予測値のインパルス

不確実性予測値のインパルス

投資のインパルス

