

(前期第 I 期・国際)

令和 5 年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

経済理論

- ・ 第 1 問～第 4 問のすべてに日本語か英語で答えなさい。
- ・ 各問の解答は、それぞれ別の解答用紙に記入しなさい。

第 1 問 二人の消費者 A、B と二つの非分割財 (0 か 1 しか消費量を選べない財) とお金からなる市場を考える。消費者の効用はお金に対して準線形とする。消費者の初期賦存はそれぞれ $\omega_A = (1, 0)$ 、 $\omega_B = (0, 1)$ とする。

(1) この市場におけるワルラス均衡の定義を書きなさい。(20 点)

消費者 A は両財を補完財と見ており、両財共に消費した時のみ 1、それ以外は 0 の効用を得るとする。消費者 B は両財を代替財と見ており、どちらも消費できない時は 0、どちらか一つでも消費できれば 0.75 の効用を得るとする。

(2) この市場にはワルラス均衡が存在しないことを示しなさい。(20 点)

この市場のレプリカを用意し、消費者 A が二人、B も二人、両財共に二つずつ存在するような拡大市場を考える。

(3) この拡大市場にはワルラス均衡が存在することを示しなさい。(10 点)

- 第 2 問
- (1) 純粋戦略ナッシュ均衡の数学的定義を書きなさい。ただし使用した数学記号の意味を全て説明すること。(20 点)
 - (2) 純粋戦略部分ゲーム完全均衡ではない純粋戦略ナッシュ均衡が存在するゲームを例示し、またその例における純粋戦略部分ゲーム完全均衡と純粋戦略ナッシュ均衡を全て求めなさい。(15 点)
 - (3) ある一つの財を競り落とすサードプライスオークションにおいては、一般的に正直入札 (財に対する自分の評価額をそのまま入札すること) は弱支配戦略にならないことを示しなさい。(15 点)

第3問 テイラー・ルールとは何かを説明し、変動する経済を安定化させる政策ツールとしての有用性について議論しなさい。(50点)

第4問 部分準備預金制度におけるマネーサプライのモデルを考える。

- C : 現金通貨
- D : 要求支払い預金
- R : 民間銀行が保有する準備
- rd : 要求支払い預金に対する準備の比
- cd : 要求支払い預金に対する現金通貨の比

上の変数を使い、次の問に答えなさい。

- (1) マネーサプライとマネタリーベース及びハイパワードマネーを定義しなさい。(2008年以降、日本銀行はマネーサプライをマネースtockと呼んでいる。)(10点)
- (2) 貨幣乗数を導出しなさい。(10点)
- (3) 中央銀行は rd を減少させたとして、マネーサプライがどのように変化するかを直観的に説明しなさい。(10点)
- (4) 消費者は現金通貨よりも、要求支払い預金から直接引き落とされる電子マネーを使うようになったとして、マネーサプライがどのように変化するかを直観的に説明しなさい。(10点)
- (5) 公開市場操作をとおして中央銀行が民間から国債を買ったとして、マネーサプライがどのように変化するかを直観的に説明しなさい。(10点)

(前期第 I 期・国際)

令和 5 年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

Economic Theory

- Answer all of the following four questions in either English or Japanese.
- Use a separate answer sheet for each question.

1. Consider an economy with two consumers A and B, two indivisible goods (one can consume either 0 or 1 amount), and money. Consumers' utility is assumed to be quasilinear in money. The initial endowment for each consumer is $\omega_A = (1,0)$ and $\omega_B = (0,1)$.

(1) Write down the definition of a Walrasian equilibrium in this economy. (20 points)

Consumer A views the two goods as complements, deriving 1 utility from consuming both and 0 otherwise. Consumer B views them as substitutes, deriving 0.75 utility from consuming at least one of them and 0 otherwise.

(2) Show that there is no Walrasian equilibrium in this economy. (20 points)

Consider an expansion of this economy by doubling all the elements. There are two A's, two B's, and two units for each of the goods.

(3) Show that there is a Walrasian equilibrium in this expanded economy. (10 points)

2. (1) Write down the mathematical definition of pure-strategy Nash equilibrium (whenever you use mathematical symbols, you must describe their meanings). (20 points)
- (2) Provide an example of a game where there is a pure-strategy Nash equilibrium that is not a subgame perfect equilibrium. Also, derive all the pure-strategy Nash equilibria and all the pure-strategy subgame perfect equilibria in your example. (15 points)
- (3) Show that in a third-price auction for one good, sincere bidding (bidding one's value) is generally not a weakly dominant strategy for a buyer. (15 points)

3. Explain what the Taylor Rule is, and discuss its usefulness as a policy tool to stabilize a fluctuating economy. (50 points)
4. Consider a simple money supply model in a fractional-reserve banking system.
 - C : currency
 - D : demand deposits
 - R : bank reserves
 - rd : the fraction of reserves to demand deposits
 - cd : the fraction of currency to demand deposits

Using the notation above, answer the following questions:

- (1) Using the above variables, define money supply, monetary base and high-powered money. (The Bank of Japan renamed money supply money stock in 2008.) (10 points)
- (2) Derive the money multiplier. (10 points)
- (3) Suppose that the central bank raises rd . Intuitively explain how money supply changes. (10 points)
- (4) Suppose that consumers spend more frequently electronic money, which is directly withdrawn from demand deposits, than currency. Intuitively explain how money supply changes. (10 points)
- (5) Suppose that the government purchases bonds through open market operations. Intuitively explain how money supply changes. (10 points)

(前期第 I 期・国際)

令和 5 年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

経 済 史

- ・第 1 問～第 4 問のすべてに、日本語か英語で答えなさい。
- ・各問の解答は、それぞれ別の解答用紙に記入しなさい。

第 1 問 近代日本において、西洋からの技術導入を可能にした条件について論じなさい。
(50 点)

第 2 問 第一次大戦期および第二次大戦期に、それぞれの期で日本経済がどのように変化したのかを論じなさい。(50 点)

第 3 問 中世ヨーロッパにおける封建制と領主制について論じなさい。(50 点)

第 4 問 1920 年代ヨーロッパの経済状況について論じなさい。(50 点)

(前期第 I 期・国際)

令和 5 年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

Economic History

- Answer all of the following four questions either in English or in Japanese.
 - Answer each question on a separate sheet.
1. Discuss the conditions that made it possible for Japan to introduce advanced technologies from the West during the Modern Era. (50 points)
 2. Discuss how the Japanese economy changed during the following war periods: the First World War and the Second World War. (50 points)
 3. Discuss Feudalism and the Manor system in Medieval Europe. (50 points)
 4. Discuss the economic conjuncture of Europe in the 1920s. (50 points)

令和5年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

統計学

- 第1問～第3問のすべてに日本語か英語で答えなさい。
- 各問の解答は、それぞれ別の解答用紙に記入しなさい。
- 必要に応じて、添付の統計分布表を利用しなさい。
- 本研究科で貸与する電卓のみ使用を認めます。

第1問 X と Y は互いに独立な確率変数とし、

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}, \quad P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}$$

を満たすものとする。また、 Z と W を次のように定義する。

$$Z = |X + Y|, \quad W = |X - Y|$$

- (1) X の平均と分散を求めなさい。(10点)
- (2) Z の平均と分散を求めなさい。(10点)
- (3) Z と W の同時確率関数を求めなさい。(20点)
- (4) Z と W の共分散を求めなさい。(20点)

第2問 $\{X_1, \dots, X_{10}\}$ は平均 μ 、分散 σ^2 の正規母集団からの無作為標本であるとする。帰無仮説 $H_0: \sigma^2 = 1$ を対立仮説 $H_1: \sigma^2 > 1$ に対して検定するため、次のような検定統計量を用いることにする。

$$T = 9S^2 = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2$$

ただし、 $\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} X_i / 10$ である。

- (1) H_0 が正しいとき、 $E[S^2] = 1$ であることを示しなさい。(20点)
- (2) $T > c$ のときに H_0 を棄却するものとする。有意水準 0.05 で検定を行うときの c の値を求めなさい。(10点)
- (3) $T \leq c$ のときに H_0 を棄却するものとする。有意水準 0.05 で検定を行うときの c の値を求めなさい。(10点)
- (4) (2) と (3) の検定のどちらがより望ましいと考えられるか。理由とともに答えなさい。(20点)

第3問 次の単純回帰モデルを考える。

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

ただし、 α と β は未知の回帰係数、 X_i は非確率的な説明変数、 u_i は正規分布にしたがう誤差項で次の性質を満たす。

$$E[u_i] = 0, \quad E[u_i u_j] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

標本の大きさが9のデータ ($n = 9$) をもとに、次の値が得られている。

$$\sum_{i=1}^9 X_i = 90, \quad \sum_{i=1}^9 Y_i = 45, \quad \sum_{i=1}^9 X_i^2 = 1140, \quad \sum_{i=1}^9 X_i Y_i = 558, \quad \sum_{i=1}^9 Y_i^2 = 277$$

以下の問に答えなさい。

- (1) α と β の最小自乗推定値を求めなさい。(10点)
- (2) σ^2 の不偏推定値を求めなさい。(10点)
- (3) β の最小自乗推定値の標準誤差を求めなさい。(20点)
- (4) β の95%信頼区間を求めなさい。(20点)
- (5) 決定係数を求めなさい。(20点)

正規分布表： $X \sim N(0, 1)$

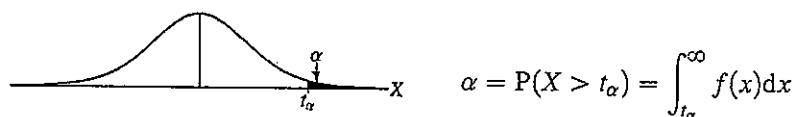


$$\alpha = P(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002

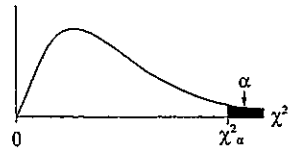
α	.10	.05	.025	.010	.005	.001	.0005	.0001	.00001
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190	4.2649

t分布表: $X \sim t(k)$



α	.10	.05	.025	.010	.005
k (自由度)					
1	3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2	1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3	1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4	1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5	1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6	1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7	1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8	1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9	1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10	1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11	1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12	1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13	1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14	1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15	1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16	1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17	1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18	1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19	1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20	1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21	1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22	1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8187
23	1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24	1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25	1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26	1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27	1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28	1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29	1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30	1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40	1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50	1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60	1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
120	1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174
∞	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

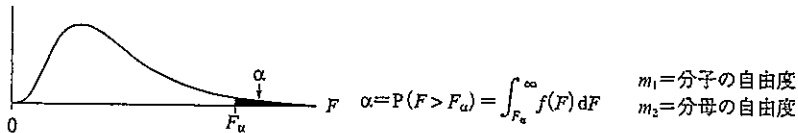
カイ 2 乗分布表: $\chi^2(m)$



$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2$$

α	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.010	.005
m (自由度)										
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.0717	.115	.216	.352	.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.207	.297	.484	.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

F 分布表 (5%点, $\alpha = 0.05$): $F(m_1, m_2)$ —〈続き〉—



$m_1 \backslash m_2$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	20	25	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	247	248	249	250	251
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.68	8.66	8.63	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.83	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.59	4.56	4.52	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.91	3.87	3.83	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.48	3.44	3.40	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.19	3.15	3.11	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.97	2.94	2.89	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.81	2.77	2.73	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.62	2.58	2.54	2.50	2.47
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.70	2.65	2.62	2.58	2.55	2.53	2.50	2.46	2.41	2.38
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.58	2.55	2.53	2.50	2.46	2.41	2.38	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.43	2.39	2.34	2.31	2.27
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.37	2.33	2.28	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.32	2.28	2.23	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.27	2.23	2.18	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.23	2.19	2.14	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.20	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.17	2.12	2.07	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.11	2.07	2.02	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.09	2.05	2.00	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.07	2.03	1.97	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.03	1.99	1.94	1.90	1.85
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.02	1.97	1.92	1.88	1.84
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.00	1.96	1.91	1.87	1.82
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	1.99	1.94	1.89	1.85	1.81
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.98	1.93	1.88	1.84	1.79
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	2.15	2.11	2.08	2.05	2.03	2.00	1.96	1.92	1.87	1.83	1.78
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.95	1.91	1.85	1.82	1.77
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.00	1.98	1.94	1.90	1.84	1.81	1.76
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.93	1.89	1.83	1.80	1.75
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.92	1.88	1.82	1.79	1.74
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.89	1.84	1.78	1.74	1.69
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94	1.92	1.89	1.86	1.81	1.75	1.71	1.66
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.80	1.75	1.69	1.63
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.91	1.88	1.85	1.83	1.79	1.74	1.68	1.62	1.57
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.77	1.72	1.66	1.62	1.57
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.75	1.70	1.64	1.60	1.54
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.59	1.53
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.73	1.69	1.64	1.58	1.54
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.78	1.76	1.73	1.69	1.64	1.58	1.54	1.48
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.67	1.62	1.56	1.52	1.46
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69	1.67	1.62	1.57	1.51	1.46	1.39

令和5年度 神戸大学大学院経済学研究科
博士課程前期課程入学試験問題

Statistics

- Answer all of the following three questions either in English or Japanese.
- Answer each question on a separate sheet.
- Use the statistical tables if necessary.
- Applicants are authorized to use a calculator lent by our Graduate School.

1. Let X and Y be independent random variables satisfying

$$P(X = 1) = P(Y = 1) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad P(X = -1) = P(Y = -1) = \frac{1}{2}.$$

Moreover, we define Z and W by

$$Z = |X + Y| \quad \text{and} \quad W = |X - Y|,$$

respectively.

- (1) Find the mean and variance of X . (10 points)
- (2) Find the mean and variance of Z . (10 points)
- (3) Find the joint probability function of Z and W . (20 points)
- (4) Find the covariance of Z and W . (20 points)

2. Let $\{X_1, \dots, X_{10}\}$ be a random sample from a normal population with mean μ and variance σ^2 . You test the null hypothesis $H_0 : \sigma^2 = 1$ against the alternative hypothesis $H_1 : \sigma^2 > 1$ by using the following test statistic:

$$T = 9S^2 = \sum_{i=1}^{10} (X_i - \bar{X})^2,$$

where $\bar{X} = \sum_{i=1}^{10} X_i / 10$.

- (1) Show that $E[S^2] = 1$ if H_0 is true. (20 points)
- (2) Suppose that you reject H_0 if $T > c$. Find the value of c when the significance level of the test is 0.05. (10 points)
- (3) Suppose that you reject H_0 if $T \leq c$. Find the value of c when the significance level of the test is 0.05. (10 points)
- (4) Which test is more desirable, (2) or (3)? Explain why. (20 points)

3. Consider the following simple regression model.

$$Y_i = \alpha + \beta X_i + u_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

where α and β are unknown regression coefficients, X_i is a nonstochastic explanatory variable, and an error term u_i has a normal distribution with the following properties:

$$E[u_i] = 0, \quad E[u_i u_j] = \begin{cases} \sigma^2 & \text{for } i = j \\ 0 & \text{for } i \neq j \end{cases}$$

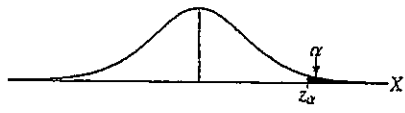
Based on data with a sample size of 9 ($n = 9$), the following values are obtained:

$$\sum_{i=1}^9 X_i = 90, \quad \sum_{i=1}^9 Y_i = 45, \quad \sum_{i=1}^9 X_i^2 = 1140, \quad \sum_{i=1}^9 X_i Y_i = 558, \quad \sum_{i=1}^9 Y_i^2 = 277$$

Answer the following questions:

- (1) Find the least squares estimates of α and β . (10 points)
- (2) Find the unbiased estimate of σ^2 . (10 points)
- (3) Find the standard error of least squares estimate of β . (20 points)
- (4) Find the 95% confidence interval of β . (20 points)
- (5) Find the coefficient of determination. (20 points)

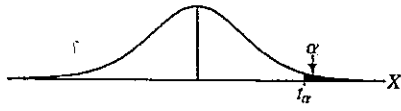
Normal distribution: $X \sim N(0, 1)$



$$\alpha = P(X > z_\alpha) = \int_{z_\alpha}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right) dx$$

z_α	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.4960	.4920	.4880	.4841	.4801	.4761	.4721	.4681	.4641
0.1	.4602	.4562	.4522	.4483	.4443	.4404	.4364	.4325	.4286	.4247
0.2	.4207	.4168	.4129	.4091	.4052	.4013	.3974	.3936	.3897	.3859
0.3	.3821	.3783	.3745	.3707	.3669	.3632	.3594	.3557	.3520	.3483
0.4	.3446	.3409	.3372	.3336	.3300	.3264	.3228	.3192	.3156	.3121
0.5	.3085	.3050	.3015	.2981	.2946	.2912	.2877	.2843	.2810	.2776
0.6	.2743	.2709	.2676	.2644	.2611	.2579	.2546	.2514	.2483	.2451
0.7	.2420	.2389	.2358	.2327	.2297	.2266	.2236	.2207	.2177	.2148
0.8	.2119	.2090	.2061	.2033	.2005	.1977	.1949	.1922	.1894	.1867
0.9	.1841	.1814	.1788	.1762	.1736	.1711	.1685	.1660	.1635	.1611
1.0	.1587	.1563	.1539	.1515	.1492	.1469	.1446	.1423	.1401	.1379
1.1	.1357	.1335	.1314	.1292	.1271	.1251	.1230	.1210	.1190	.1170
1.2	.1151	.1131	.1112	.1094	.1075	.1057	.1038	.1020	.1003	.0985
1.3	.0968	.0951	.0934	.0918	.0901	.0885	.0869	.0853	.0838	.0823
1.4	.0808	.0793	.0778	.0764	.0749	.0735	.0721	.0708	.0694	.0681
1.5	.0668	.0655	.0643	.0630	.0618	.0606	.0594	.0582	.0571	.0559
1.6	.0548	.0537	.0526	.0516	.0505	.0495	.0485	.0475	.0465	.0455
1.7	.0446	.0436	.0427	.0418	.0409	.0401	.0392	.0384	.0375	.0367
1.8	.0359	.0351	.0344	.0336	.0329	.0322	.0314	.0307	.0301	.0294
1.9	.0287	.0281	.0274	.0268	.0262	.0256	.0250	.0244	.0239	.0233
2.0	.0228	.0222	.0217	.0212	.0207	.0202	.0197	.0192	.0188	.0183
2.1	.0179	.0174	.0170	.0166	.0162	.0158	.0154	.0150	.0146	.0143
2.2	.0139	.0136	.0132	.0129	.0125	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110
2.3	.0107	.0104	.0102	.0099	.0096	.0094	.0091	.0089	.0087	.0084
2.4	.0082	.0080	.0078	.0075	.0073	.0071	.0069	.0068	.0066	.0064
2.5	.0062	.0060	.0059	.0057	.0055	.0054	.0052	.0051	.0049	.0048
2.6	.0047	.0045	.0044	.0043	.0041	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036
2.7	.0035	.0034	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026
2.8	.0026	.0025	.0024	.0023	.0023	.0022	.0021	.0021	.0020	.0019
2.9	.0019	.0018	.0018	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014
3.0	.0013	.0013	.0013	.0012	.0012	.0011	.0011	.0011	.0010	.0010
3.1	.0010	.0009	.0009	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007
3.2	.0007	.0007	.0006	.0006	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005
3.3	.0005	.0005	.0005	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003
3.4	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002
α	.10	.05	.025	.010	.005	.001	.0005	.0001	.00001	
z_α	1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758	3.0902	3.2905	3.7190	4.2649	

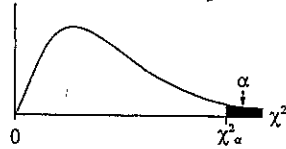
t distribution: $X \sim t(k)$



$$\alpha = P(X > t_\alpha) = \int_{t_\alpha}^{\infty} f(x)dx$$

k (Degrees of Freedom)	α	.10	.05	.025	.010	.005
1		3.0777	6.3138	12.7062	31.8205	63.6567
2		1.8856	2.9200	4.3027	6.9646	9.9248
3		1.6377	2.3534	3.1824	4.5407	5.8409
4		1.5332	2.1318	2.7764	3.7469	4.6041
5		1.4759	2.0150	2.5706	3.3649	4.0321
6		1.4398	1.9432	2.4469	3.1427	3.7074
7		1.4149	1.8946	2.3646	2.9980	3.4995
8		1.3968	1.8595	2.3060	2.8965	3.3554
9		1.3830	1.8331	2.2622	2.8214	3.2498
10		1.3722	1.8125	2.2281	2.7638	3.1693
11		1.3634	1.7959	2.2010	2.7181	3.1058
12		1.3562	1.7823	2.1788	2.6810	3.0545
13		1.3502	1.7709	2.1604	2.6503	3.0123
14		1.3450	1.7613	2.1448	2.6245	2.9768
15		1.3406	1.7531	2.1314	2.6025	2.9467
16		1.3368	1.7459	2.1199	2.5835	2.9208
17		1.3334	1.7396	2.1098	2.5669	2.8982
18		1.3304	1.7341	2.1009	2.5524	2.8784
19		1.3277	1.7291	2.0930	2.5395	2.8609
20		1.3253	1.7247	2.0860	2.5280	2.8453
21		1.3232	1.7207	2.0796	2.5176	2.8314
22		1.3212	1.7171	2.0739	2.5083	2.8187
23		1.3195	1.7139	2.0687	2.4999	2.8073
24		1.3178	1.7109	2.0639	2.4922	2.7969
25		1.3163	1.7081	2.0595	2.4851	2.7874
26		1.3150	1.7056	2.0555	2.4786	2.7787
27		1.3137	1.7033	2.0518	2.4727	2.7707
28		1.3125	1.7011	2.0484	2.4671	2.7633
29		1.3114	1.6991	2.0452	2.4620	2.7564
30		1.3104	1.6973	2.0423	2.4573	2.7500
40		1.3031	1.6839	2.0211	2.4233	2.7045
50		1.2987	1.6759	2.0086	2.4033	2.6778
60		1.2958	1.6706	2.0003	2.3901	2.6603
120		1.2886	1.6577	1.9799	2.3578	2.6174
∞		1.2816	1.6449	1.9600	2.3263	2.5758

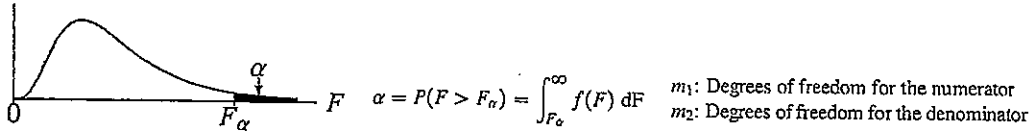
Chi-squared distribution: $\chi^2(m)$



$$\alpha = P(\chi^2 > \chi^2_\alpha) = \int_{\chi^2_\alpha}^{\infty} f(\chi^2) d\chi^2$$

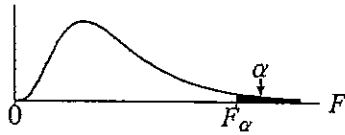
α	.995	.99	.975	.95	.90	.10	.05	.025	.010	.005
<i>m</i> (Degrees of Freedom)										
1	.0000393	.000157	.000982	.00393	.0158	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.0100	.0201	.0506	.103	.211	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.0717	.115	.216	.352	.584	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.207	.297	.484	.711	1.06	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

F distribution (1% point, $\alpha = 0.01$) : $F(m_1, m_2)$



m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	20	25	30	40
1	4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5981	6022	6056	6083	6106	6126	6143	6157	6181	6209	6240	6261	6287
2	98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5
3	34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3	27.2	27.1	27.1	27.0	26.9	26.9	26.8	26.7	26.6	26.5	26.4
4	21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7	14.5	14.5	14.4	14.3	14.2	14.2	14.1	14.0	13.9	13.8	13.7
5	16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2	10.1	9.96	9.89	9.82	9.77	9.72	9.64	9.55	9.45	9.38	9.29
6	13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.79	7.72	7.66	7.60	7.56	7.48	7.40	7.30	7.23	7.14
7	12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.54	6.47	6.41	6.36	6.31	6.24	6.16	6.06	5.99	5.91
8	11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.73	5.67	5.61	5.56	5.52	5.44	5.36	5.26	5.20	5.12
9	10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.18	5.11	5.05	5.01	4.96	4.89	4.81	4.71	4.65	4.57
10	10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.77	4.71	4.65	4.60	4.56	4.49	4.41	4.31	4.25	4.17
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.46	4.40	4.34	4.29	4.25	4.18	4.10	4.01	3.94	3.86
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.22	4.16	4.10	4.05	4.01	3.94	3.86	3.76	3.70	3.62
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	4.02	3.96	3.91	3.86	3.82	3.75	3.66	3.57	3.51	3.43
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.86	3.80	3.75	3.70	3.66	3.59	3.51	3.41	3.35	3.27
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.73	3.67	3.61	3.56	3.52	3.45	3.37	3.28	3.21	3.13
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.62	3.55	3.50	3.45	3.41	3.34	3.26	3.16	3.10	3.02
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.52	3.46	3.40	3.35	3.31	3.24	3.16	3.07	3.00	2.92
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.43	3.37	3.32	3.27	3.23	3.16	3.08	2.98	2.92	2.84
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.36	3.30	3.24	3.19	3.15	3.08	3.00	2.91	2.84	2.76
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.29	3.23	3.18	3.13	3.09	3.02	2.94	2.85	2.79	2.72
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.24	3.17	3.12	3.07	3.03	2.96	2.88	2.79	2.72	2.64
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.18	3.12	3.07	3.02	2.98	2.91	2.83	2.73	2.67	2.58
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.14	3.07	3.02	2.97	2.93	2.86	2.78	2.69	2.62	2.54
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.09	3.03	2.98	2.93	2.89	2.82	2.74	2.64	2.58	2.49
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	3.06	2.99	2.94	2.89	2.85	2.78	2.70	2.60	2.54	2.45
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	3.02	2.96	2.90	2.86	2.81	2.75	2.66	2.57	2.50	2.42
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.99	2.93	2.87	2.82	2.78	2.71	2.63	2.54	2.47	2.38
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.96	2.90	2.84	2.79	2.75	2.68	2.60	2.51	2.44	2.35
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.93	2.87	2.81	2.77	2.73	2.66	2.57	2.48	2.41	2.33
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.91	2.84	2.79	2.74	2.70	2.63	2.55	2.45	2.39	2.30
31	7.53	5.36	4.48	3.99	3.67	3.45	3.28	3.15	3.04	2.96	2.88	2.82	2.77	2.72	2.68	2.61	2.52	2.43	2.36	2.27
32	7.50	5.34	4.46	3.97	3.65	3.43	3.26	3.13	3.02	2.93	2.86	2.80	2.74	2.70	2.65	2.58	2.50	2.41	2.34	2.25
33	7.47	5.31	4.44	3.95	3.63	3.41	3.24	3.11	3.00	2.91	2.84	2.78	2.72	2.68	2.63	2.56	2.48	2.39	2.32	2.23
34	7.44	5.29	4.42	3.93	3.61	3.39	3.22	3.09	2.98	2.89	2.82	2.76	2.70	2.66	2.61	2.54	2.46	2.37	2.30	2.21
35	7.42	5.27	4.40	3.91	3.59	3.37	3.20	3.07	2.96	2.88	2.80	2.74	2.69	2.64	2.60	2.53	2.44	2.35	2.28	2.19
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.73	2.66	2.61	2.55	2.51	2.46	2.39	2.31	2.21	2.14
45	7.23	5.11	4.25	3.77	3.45	3.23	3.07	2.94	2.83	2.74	2.67	2.61	2.55	2.51	2.46	2.39	2.31	2.21	2.14	2.05
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.63	2.56	2.51	2.46	2.42	2.35	2.27	2.17	2.10	2.01
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.56	2.50	2.44	2.39	2.35	2.28	2.20	2.10	2.03	1.94
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.51	2.45	2.40	2.35	2.31	2.23	2.15	2.05	1.98	1.89
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.48	2.42	2.36	2.31	2.27	2.20	2.12	2.01	1.94	1.85
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.45	2.39	2.33	2.29	2.24	2.17	2.09	1.99	1.92	1.82
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.43	2.37	2.31	2.27	2.22	2.15	2.07	1.97	1.89	1.80
150	6.81	4.75	3.91	3.45	3.14	2.92	2.76	2.63	2.53	2.44	2.37	2.31	2.25	2.20	2.16	2.09	2.00	1.90	1.83	1.73
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.89	2.73	2.60	2.50	2.41	2.34	2.27	2.22	2.17	2.13	2.06	1.97	1.87	1.79	1.69
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.25	2.18	2.13	2.08	2.04	1.97	1.88	1.77	1.70	1.59

F distribution (5% point, $\alpha = 0.05$) : $F(m_1, m_2)$ —Continued—



$$\alpha = P(F > F_\alpha) = \int_{F_\alpha}^{\infty} f(F) dF$$

m_1 : Degrees of freedom for the numerator
 m_2 : Degrees of freedom for the denominator

m_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	17	20	25	30	40
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244	245	245	246	247	248	249	250	251
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.76	8.74	8.73	8.71	8.70	8.68	8.66	8.63	8.62	8.59
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.94	5.91	5.89	5.87	5.86	5.83	5.80	5.77	5.75	5.72
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.70	4.68	4.66	4.64	4.62	4.59	4.56	4.52	4.50	4.46
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.03	4.00	3.98	3.96	3.94	3.91	3.87	3.83	3.81	3.77
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.60	3.57	3.55	3.53	3.51	3.48	3.44	3.40	3.38	3.34
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.31	3.28	3.26	3.24	3.22	3.19	3.15	3.11	3.08	3.04
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.10	3.07	3.05	3.03	3.01	2.97	2.94	2.89	2.86	2.83
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.94	2.91	2.89	2.86	2.85	2.81	2.77	2.73	2.70	2.66
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.82	2.79	2.76	2.74	2.72	2.69	2.65	2.60	2.57	2.53
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.72	2.69	2.66	2.64	2.62	2.58	2.54	2.50	2.47	2.43
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.63	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.46	2.43	2.39	2.34
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.57	2.53	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.37	2.33	2.28
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.51	2.48	2.45	2.42	2.40	2.37	2.33	2.28	2.25	2.20
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.46	2.42	2.40	2.37	2.35	2.32	2.28	2.23	2.19	2.15
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.41	2.38	2.35	2.33	2.31	2.27	2.23	2.18	2.15	2.10
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.37	2.34	2.31	2.29	2.27	2.23	2.19	2.14	2.11	2.06
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.34	2.31	2.28	2.26	2.23	2.20	2.16	2.11	2.07	2.03
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.31	2.28	2.25	2.22	2.20	2.17	2.12	2.07	2.04	1.99
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.28	2.25	2.22	2.20	2.18	2.14	2.10	2.05	2.01	1.96
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.26	2.23	2.20	2.17	2.15	2.11	2.07	2.02	1.98	1.94
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.24	2.20	2.18	2.15	2.13	2.09	2.05	2.00	1.96	1.91
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.22	2.18	2.15	2.13	2.11	2.07	2.03	1.97	1.94	1.89
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.20	2.16	2.14	2.11	2.09	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.18	2.15	2.12	2.09	2.07	2.03	1.99	1.94	1.90	1.85
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.17	2.13	2.10	2.08	2.06	2.02	1.97	1.92	1.88	1.84
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.15	2.12	2.09	2.06	2.04	2.00	1.96	1.91	1.87	1.82
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.14	2.10	2.08	2.05	2.03	1.99	1.94	1.89	1.85	1.81
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.13	2.09	2.06	2.04	2.01	1.98	1.93	1.88	1.84	1.79
31	4.16	3.30	2.91	2.68	2.52	2.41	2.32	2.25	2.20	2.15	2.11	2.08	2.05	2.03	2.00	1.96	1.92	1.87	1.83	1.78
32	4.15	3.29	2.90	2.67	2.51	2.40	2.31	2.24	2.19	2.14	2.10	2.07	2.04	2.01	1.99	1.95	1.91	1.85	1.82	1.77
33	4.14	3.28	2.89	2.66	2.50	2.39	2.30	2.23	2.18	2.13	2.09	2.06	2.03	2.00	1.98	1.94	1.90	1.84	1.81	1.76
34	4.13	3.28	2.88	2.65	2.49	2.38	2.29	2.23	2.17	2.12	2.08	2.05	2.02	1.99	1.97	1.93	1.89	1.83	1.80	1.75
35	4.12	3.27	2.87	2.64	2.49	2.37	2.29	2.22	2.16	2.11	2.07	2.04	2.01	1.99	1.96	1.92	1.88	1.82	1.79	1.74
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.04	2.00	1.97	1.95	1.92	1.89	1.84	1.78	1.74	1.69
45	4.06	3.20	2.81	2.58	2.42	2.31	2.22	2.15	2.10	2.05	2.01	1.97	1.94	1.92	1.89	1.86	1.81	1.75	1.71	1.66
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.20	2.13	2.07	2.03	1.99	1.95	1.92	1.89	1.87	1.83	1.78	1.73	1.69	1.63
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.95	1.92	1.89	1.86	1.84	1.81	1.77	1.72	1.66	1.57
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.14	2.07	2.02	1.97	1.93	1.89	1.86	1.84	1.81	1.77	1.72	1.66	1.62	1.57
80	3.96	3.11	2.72	2.49	2.33	2.21	2.13	2.06	2.00	1.95	1.91	1.88	1.84	1.82	1.79	1.75	1.70	1.64	1.60	1.54
90	3.95	3.10	2.71	2.47	2.32	2.20	2.11	2.04	1.99	1.94	1.90	1.86	1.83	1.80	1.78	1.74	1.69	1.63	1.59	1.53
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.31	2.19	2.10	2.03	1.97	1.93	1.89	1.85	1.82	1.79	1.77	1.73	1.68	1.62	1.57	1.52
150	3.90	3.06	2.66	2.43	2.27	2.16	2.07	2.00	1.94	1.89	1.85	1.82	1.79	1.76	1.73	1.69	1.64	1.58	1.54	1.48
200	3.89	3.04	2.65	2.42	2.26	2.14	2.06	1.98	1.93	1.88	1.84	1.80	1.77	1.74	1.72	1.67	1.62	1.56	1.52	1.46
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.79	1.75	1.72	1.69	1.67	1.62	1.57	1.51	1.46	1.39