令和 6 年度神戸大学経済学部第 3 年次編入学試験問題

数学

注意：計算問題の答案には計算過程をある程度記述すること。

第1問　行列 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & -4\end{bmatrix}$ について，以下の問いに答えなさい。

(1) 2 次元列ベクトル x と y が 1 次独立であるとする。このとき， Ax と Ay が 1 次独立であることを示しなさい。(15 点)

(2) A の固有値を求めなさい。(7 点)

(3) (2)で求めた A の各固有値に属する固有ベクトルをそれぞれ一つ求めなさい。(8 点)

第2問　以下の問いに答えなさい。

(1) 行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 0\\ 3 & 4 & -5\end{vmatrix}$ の値を<u>第 2 行に関する余因子展開を用いて</u>求めなさい。(10 点)

(2) 関数 $f(x,y)=\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^4$ （ただし $x,y>0$ ）を考える。以下の問いに答えなさい。

① $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ を求めなさい。 (5 点)

② $f(x,y)$ が 1 次同次関数であることを示しなさい。(5 点)

第3問　以下の問いに答えなさい。ただし， $\mathbb{R}$ は実数全体の集合である。

(1) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が任意の点 $x\in\mathbb{R}$ に対して $0\le f(x)\le x^2$ であるとする。このとき， f が $x=0$ で微分可能であり， $f'(0)=0$ となることを示しなさい。(15 点)

(2) 関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ と $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ はともに凹関数であり，また f は単調増加関数であるとする。このとき，合成関数 $f(g(x))$ は凹関数であることを示しなさい。(15 点)

第4問　関数 $f(x,y)=-2x^3-6xy-3y^2+12x+3$ について，以下の問いに答えなさい。

(1) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ を満たす点 (x,y) （つまり， $f(x,y)$ の臨界点）をすべて見つけなさい。(5 点)

(2) (1)で求めた各臨界点について，その点が $f(x,y)$ を極大にするか，極小にするか，いずれでもないか，調べなさい。(10 点)

(3) いま $f(0,-1)=0$ である。方程式 $f(x,y)=0$ に関して，陰関数定理により点 $(0,-1)$ の近傍で存在が保証される陰関数 $x=g(y)$ について， $g'(-1)$ を求めなさい。(5 点)

令和6年度神戸大学経済学部第3年次編入学試験問題

数学（解答例）

第1問

(1) 任意の実数α, βをとる。$\alpha Ax + \beta Ay = 0_2$（$0_2$は2次元ゼロベクトル）とする。このとき，

$$A(\alpha x + \beta y) = 0_2$$

となる。ここで，Aの行列式$|A|$を考えると$|A| = -10 \neq 0$となることに注意すると，Aの逆行列A^{-1}が存在するので，

$$\alpha x + \beta y = A^{-1}A(\alpha x + \beta y) = A^{-1}0_2 = 0_2$$

となる。このとき，xとyが1次独立であるから，$\alpha = \beta = 0$となる。したがって，AxとAyは1次独立である。

(2) 固有値λは固有方程式

$$|A - \lambda E_2| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ 2 & -4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda - 10 = (\lambda+5)(\lambda-2) = 0$$ （E_2は2次の単位行列）

の解であり，$\lambda = -5, 2$となる。よって，Aの固有値は-5と2である。

(3) 固有値-5に属する固有ベクトル$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0_2$は

$$Ax = (-5)x, \text{ つまり } 2x_1 + x_2 = 0$$

の解である。よって，$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$は固有値$-5$に属する固有ベクトルの1つである。

固有値2に属する固有ベクトル$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0_2$は

$$Ax = 2x, \text{ つまり } -x_1 + 3x_2 = 0$$

の解である。よって，$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$は固有値2に属する固有ベクトルの1つである。

第2問

(1) 第2行に関する余因子展開を考えると，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + 3 \times (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} + 0 \times (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$$

となる。ここで，$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -22$，$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -14$，$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$であるから，

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} = 2 \times (-1)^{2+1}(-22) + 3 \times (-1)^{2+2}(-14) + 0 \times (-1)^{2+3}(-2) = 2$$

となる。

(2)

① $\dfrac{\partial}{\partial x}f(x,y)=4\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^3\times\dfrac{1}{4}x^{-3/4}=\dfrac{\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^3}{x^{3/4}}$。

② 任意の実数$t>0$に対して，

$$f(tx,ty)=\left\{(tx)^{1/4}+(ty)^{1/4}\right\}^4=\left\{t^{1/4}\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)\right\}^4=t\left(x^{1/4}+y^{1/4}\right)^4=tf(x,y)$$

となる。よって，$f(x,y)$は1次同次関数である。

第3問

(1) $0\le f(0)\le 0^2=0$であるので，$f(0)=0$である。

任意のxに対して，$0\le f(x)\le x^2$であるので，

① 任意の$x<0$に対して，$\dfrac{x^2}{x}\le\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\le 0$，

② 任意の$x>0$に対して，$\dfrac{x^2}{x}\ge\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\ge 0$

となる。このとき，

①と $\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{x^2}{x}=0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$，

②と $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{x^2}{x}=0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$

となる。よって，関数fは$x=0$で微分可能であり，$f'(0)=0$である。

(2) 任意の$x_1,x_2\in\mathbb{R}$と任意の$\alpha\in[0,1]$をとる。関数gが凹関数であるので，

$$g(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2)\ge\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2)$$

となる。よって，関数fが単調増加関数であるので，

$$f(g(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2))\ge f(\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2))\qquad(\#)$$

となる。また，fが凹関数であるので，

$$f(\alpha g(x_1)+(1-\alpha)g(x_2))\ge\alpha f(g(x_1))+(1-\alpha)f(g(x_2))\qquad(*)$$

となる。よって，不等式（#）と（*）から，

$$f(g(\alpha x_1+(1-\alpha)x_2))\ge\alpha f(g(x_1))+(1-\alpha)f(g(x_2))$$

となる。したがって，合成関数$f(g(x))$は凹関数である。

第4問

(1) 関数$f(x,y)$をxとyについて偏微分して0とおくと，

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=-6x^2-6y+12=0,\quad\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-6x-6y=0$$

となり，臨界点は$(x,y)=(2,-2)$と$(x,y)=(-1,1)$である。

(2) $f(x, y)$ の 2 次偏導関数は,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -12x\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -6\,,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6$$

となる。

臨界点 $(x, y) = (2, -2)$ では,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) = -12 \times 2 = -24 < 0\,,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2, -2) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2, -2) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2, -2) \right)^2 = (-24) \times (-6) - (-6)^2 = 108 > 0$$

となり，極大化の 2 階の十分条件が満たされる。よって，$(x, y) = (2, -2)$ は $f(x, y)$ を極大にする。

臨界点 $(x, y) = (-1, 1)$ では,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1, 1) \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(-1, 1) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(-1, 1) \right)^2 = 12 \times (-6) - (-6)^2 = -108 < 0$$

となり，極大化と極小化のいずれの 2 階の必要条件も満たされない。よって，$(x, y) = (-1, 1)$ は $f(x, y)$ を極大にも極小にもしない。

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1) = 18 \neq 0$ に注意すると，陰関数定理から,

$$g'(-1) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(g(-1), -1)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(g(-1), -1)} = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, -1)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, -1)} = -\frac{6}{18} = -\frac{1}{3}$$

となる。