2013年1月21日 提出

論文題目 **企業の最適人選行動**

－労働者の性質に注目したチームのゲーム分析－

宮川栄一研究室

学籍番号 0902315e

氏名　　濱田高彰

目次

序章

本文の流れ

私たちの日常生活の中で、二者択一を迫られる場面は数多く存在する．たとえば、服屋さんで目当ての服を買うか買わないか、大好きな歌手のライブに行くか行かないかなど様々である．しかしこういった状況の中で、一体人はどのような基準で「買う」や「行かない」などの選択を行うのだろうか．もちろん好みや値段といった基準があるが、そこに絶えず付きまとうのは「そうしなかった自分はどうなっているだろうか」という心理的な気持ちである．服屋で言えば、飽きっぽい人なら「やっぱり買わなければ良かった」と買った後に後悔しないかどうか想像するだろう．このように人は選択しようとする行動に対して、それ以外の選択に想像を働かせ、その気持ちを踏まえた上で行動を選択しているのである．

本稿では、以上のような人の一性質に注目を当て分析を行っていく．具体的には、企業の社員に見られる二者択一の場面を想定し、社員は「頑張る」か「頑張らない」を選択する状況を考える．例えば「頑張る」を選んで仕事がうまくいけば、ちょっと手を抜けたんじゃないか、という気持ちがあるだろうし、「頑張らない」を選んで成功すれば、頑張らなくて良かったと思うであろう．そして本稿で重要となるのは、人によってその度合いが違うことである．例えば、頑張らなければよかったという「後悔」をずるずる引きずる人もいれば、すぐに切り替えられる人もいる．そういった人それぞれの性格を企業はどう見ているのだろうか．少なくとも企業はそういった人の性格と仕事を照らし合わせて、それぞれの仕事に対して最もパフォーマンスを発揮してくれる人を選ぶはずである．よって本稿では、そういった人の性格を踏まえたうえで、企業がどのような人を選ぶのかを分析していく．また本稿では、社員１人の仕事ではなくチームでのプロジェクトについて議論する[1]．理由としては、企業の中では自分以外の誰かの頑張りが自分の頑張りを左右する場面が多く存在するだろうし、チームでの行動となると、性格の違いによる振る舞いがより顕著にみられると考えられるからである．また、会社以外の様々なチームにもその教訓を活かすことができるかもしれない．

さて、以上のような状況を設定し、まずは社員の効用関数を定義する．この関数に

おいて重要な役割を果たすのが、個人の性格を示すパラメーターである α である．この値が大きいほど、選ばなかった選択肢に対する思いが大きい人であることを表している．言い換えれば、α が大きいほど慎重に選択しようとする人だということである．α に関して、本文では２種類を定義する．

具体的な分析については、プレーヤーたちが対称であるチームと非対称であるチームの２パターンを考える．なお、プレーヤーとは社員のことを指す．まずプレーヤーが対称であるとは、プロジェクト成功への貢献度が各プレーヤーで差がないことをであり、逆に非対称であるとは、プレーヤー間で成功への貢献度が異なることである．そしてそれぞれについて、社員の効用関数を用いて企業の利潤最大化を考える．この際、企業側は個人の性格 α を知っていると仮定し、利潤が最大となる最適な性格を持った個人を選ぶことを考える．つまり本稿の目標である、様々なプロジェクト、あるいは集団に応じてどのような性格を持った人に働かせることが企業側にとって最適なのかを分析していく．

研究動機

最後に、筆者がこのようなテーマを選択した理由を述べておく．最近、「人間の行動」に大きな関心がある．人間という動物は他の動物に比べて非常に知的な動物であると言われているが、そんな人間でさえ、常に合理的な選択が行えるかと言うともちろんそうではない．たとえばダイエットをするべきだと思っていても焼肉屋さんに行ってしまったり、宿題をしなければならないと思っていてもゲームをしてしまったりするのが、私たち人間の生まれ持った性質である．しかし、なぜこのような状況が生まれるのだろうか．それは人間が複数の価値基準を持ち合わせているところにある．つまり上の例で言うと、自分の中にダイエットをしたいという思いと焼肉を食べたいという思いの２つのが存在し、心理的な葛藤に直面しながら意思決定を行っているのである．

さて、経済学はこのような人間をどのように捉え、表現してきたのだろうか．基本的に、個人は単一の選好を持っており、それに基づいて合理的意思決定を行うものとして表現されてきた．つまり、ダイエットをしたいと思っていて、それが実現可能なのであれば迷うことなくダイエットをするのである．しかし、現実はそうでないとい

うことは上述した通りである．そこで、そういった人間の２重の価値基準をモデル化し、自分をコントロールしようとする人間の意思決定を表現したり[2]、そこからさらに、後悔や恥などを表現したモデルも出てきている．近年、より現実の人間に近い意思決定を表現したモデルが数多く発表されてきているのである．これらはどれも非常に興味深い．そういった研究成果を見ているうちに、より人間らしい意思決定のモデルを自分ができる範囲で考えてみたいと思うようになったのである．人間に不合理な部分が存在することは必ずしも嬉しいことではないだろうが、筆者にとっては非常に面白味を感じる性質である．

後注

[1]チームのゲームに関する基本的な分析のフレームは、神戸大学経営学部の開講講義「ゲーム理論」の講義ノートを参考にした．

[2]Gul and Pesendorfer(2001) が先駆的貢献である．この論文に出てくる効用関数は、本稿にて定義される効用関数を作る際に参考にされた．

1　モデル

1.1　設定

まず初めに基本的なモデルの設定を行う．状況は、ある企業で２人１組のチームを作り、あるプロジェクトを行うというものである．まず本稿におけるチームを定義をする．

定義 1.1. ２人の社員がする仕事の成果は、彼らの仕事の仕方に応じて生じるが、その成果は個人の成果としてではなく、その２人の成果として定まる状況をチームとする．

つまり２人の頑張りの組に対して１つの成果が定まるということである．さて、チームの定義も踏まえていくつかの記号などを定義しておく．

(I) プレーヤーと書けば、それは社員のことを指す．

(II) プレーヤー $i, j(\forall i, j = 1, 2\ , i \neq j)$ は行動 $a_i, b_i(a_i \neq b_i)$ のどちらかを選択し、任意の $a_1, b_1 \in \{H, L\}$、$a_2, b_2 \in \{h, l\}$ である．また、H, h は「頑張る」、L, l は「頑張らない」を意味する．

(III) 二人の頑張りの成果は $R(S\ or\ F)$ とする．また、S はプロジェクトの「成功」、F は「失敗」を意味する．

(IV) プレーヤー i, j の行動の組 (a_i, a_j) でのプロジェクトの成功確率を $p(a_i, a_j)$ とする．

(V) プレーヤー i の性格のパラメーターを $\alpha_{Ri} \in [0, 1]$ とする．

(VI) i さんの性格は $(\alpha_{Si}, \alpha_{Fi})$ の組で表現される．またこれを単に α_i と書く場合がある．

(VII) プレーヤーの行動の組 (a_i, a_j) とその成果 R から得られるプレーヤー i の効用関数を $u_i(a_i, a_j, R)$ とする．

(VIII) 成果が S の時に企業が得る収入を π とし、成果が F の時には 0 とする．

(IX) プレーヤーの行動の組 (a_i, a_j) に対する企業の期待利潤を $\Pi(a_i, a_j)$ とかく．

1.2　ゲーム

さて、このゲームの全体像を説明しておく．まず初めに企業が2人のプレーヤーに、プロジェクトが成功した場合の報酬をそれぞれ提示する．その時プレーヤーは自分はもちろん、相手の報酬も確認できるとし、それらをもとに自分たちの行動を決定する．その際、プレーヤー間におけるゲームは同時手番ゲームであるとする．このルールをもとに分析を進めていくが、まずその前にプレーヤーの効用関数と企業の期待利潤関数を定義する．

1.3　効用関数

次にプレーヤー i の効用関数 $u_i(a_i, a_j, R)$ を定義する．

定義 1.2. ある関数 $v_i : (a_i, R) \to \mathbb{R}$ が存在して、プレーヤー i の効用関数は

$$\begin{aligned} u_i(a_i, a_j, R) = {} & v_i(a_i, R) \\ & - \alpha_{Ri}\{p(b_i, a_j)v_i(b_i, S) + (1 - p(b_i, a_j))v_i(b_i, F) - v_i(a_i, R)\} \end{aligned} \quad (1)$$

によって表現される．

(1) 式について説明していく．まず $v_i(a_i, R)$ は単純に、自分の頑張りの度合いと成果に対して得られる効用である．例えば $v_1(L, S) > v_1(H, S)$ となる．これは後に、成果への報酬による嬉しさと頑張りのコストの差によって表現する．重要となるのは、$-\alpha_{Ri}$ 以降の部分である．まず $p(b_i, a_j)v_i(b_i, S) + (1 - p(b_i, a_j))v_i(b_i, F)$ の部分は、自分が a_i ではなく b_i を選んだ時の期待効用となっている．それと $v_i(a_i, R)$ の差が何を表すかと言えば、「選ばなかった選択肢から得られていたであろう効用と現在の効用との差」を表現している．今、$p(b_i, a_j)v_i(b_i, S) + (1 - p(b_i, a_j))v_i(b_i, F) - v_i(a_i, R) =$EOC[1]としておく．

さて、EOC の中身について少し詳しく見てみる．今仮に EOC> 0 であるとすると

$$p(b_i, a_j)v_i(b_i, S) + (1 - p(b_i, a_j))v_i(b_i, F) > v_i(a_i, R)$$

である．この場合 $-\alpha_{Ri}$EOC は非正値となり、効用は減少する．これは自分の選ばなかった b_i における期待効用が a_i における効用を上回っている場合であるので、こ

の $-\alpha_{Ri}$EOC の値は b_i を選ばなかった「後悔」による効用の減少分であると言える.

またEOC<0 の場合はどうだろうか. この時

$$v_i(a_i, R) > p(b_i, a_j)v_i(b_i, S) + (1 - p(b_i, a_j))v_i(b_i, F)$$

である. この場合 $-\alpha_{Ri}$EOC は非負値となり、効用は増加する. これは自分の選ばなかった b_i における期待効用よりも、自分の選んだ a_i における効用のほうが大きい場合であるから、この $-\alpha_{Ri}$EOC の値は、その選択肢を選んだ「満足感」[2]による効用の増加分であると言える.

さて、EOC にかかる α_{Ri} であるが、これは記号の定義にあるように個人の性格を表現するパラメーターである. 上で確認した EOC の性質から、この α_{Ri} の値の大小で「後悔」あるいは「満足感」を感じる度合いが表現される. これこそが、この効用関数の最も重要な部分であると言える. なお、α_{Ri} は定義より α_{Si} と α_{Fi} の2つが存在する. これらはそれぞれ

α_{Si} : 成功した場合の、i さんの選ばなかった行動に対する気持ちの度合い
α_{Fi} : 失敗した場合の、i さんの選ばなかった行動に対する気持ちの度合い

これは、成功した時と失敗した時の感情が必ずしも一致しないことを想定して2つに分けている. これら $(\alpha_{Si}, \alpha_{Fi})$ の組として i さんの性格が表現されている.

さて次に、この効用関数をより分析しやすい形にするために、いくつかの仮定をおく.

仮定 1.1. 成果から得られる嬉しさを $V_i(R)$、頑張りの費用を $C_i(a_i)$ とし

$$v_i(a_i, R) = V_i(R) - C_i(a_i) \tag{2}$$

であるとする.

成果から得られる嬉しさ $V_i(R)$ は、成果の報酬から得られる嬉しさであり、頑張りの費用 $C(a_i)$ は、仕事に対する身体的な疲れのようなものであると考える.

仮定 1.2. $V_i(R)$、$C_i(a_i)$ に関して

$$V_i\left(S\right) = w_i、V_i(F) = 0 \tag{3}$$
$$C_1(H) = C_2(h) = c、C_1(L) = C_2(l) = 0 \tag{4}$$

であるとする．

(3) 式は、プロジェクトが成功すれば w_i の報酬があり、失敗すると報酬がないことを意味し、報酬によって得られる効用は各プレーヤー間で同じであるとしている．なお、この報酬はイメージとしては固定給ではなくボーナスである．また、(4) 式は、仕事における疲れはプレーヤー間で同じであり、頑張れば c、頑張らなければ疲れないことを意味している．これらは必ずしも現実と一致している仮定であるとは言い難いが、あくまで分析をシンプルにするためのものである．なお、もちろんこの仮定によって $v_i(a_i, R)$ の一般性が失われることはない．

さてまず (2) 式を (1) 式に代入し、(3) 式を用いて整理すると、プレーヤー i の結果の効用は以下のように書き直せる．

$$u_i(a_i, a_j, R) = (1+\alpha_{Ri})\{V_i(R) - C_i(a_i)\} - \alpha_{Ri}\{p(b_i, a_j)V_i(S) - C_i(b_i)\} \quad (5)$$

1.4　企業の期待利潤

次に企業の利潤を考える．まずプロジェクトが成功した場合の企業の利潤は、(成功時の収入)−(その時の費用) であるから $\pi - (w_1 + w_2)$ である．さらに失敗した時には収入も報酬も 0 としているので利潤も 0 である．これらより企業の期待利潤関数 $\Pi(a_i, a_j)$ は以下のように書くことができる．

$$\Pi(a_i, a_j) = p(a_i, a_j)\{\pi - (w_1 + w_2)\} \quad (6)$$

(6) 式の右辺には $(1 - p(a_i, a_j)) \times 0$ があったが、当然これは 0 なので式の中には書かれていない

ここで期待利潤について以下の仮定をおく．

仮定 1.3. 企業は

$$\Pi(a_i, a_j) \leq 0$$

となるような行動組 (a_i, a_j) を達成させることはない．ただし、任意の (a_i, a_j) の組で $\Pi(a_i, a_j) \leq 0$ ならば、プロジェクトは行わない．

これは２人の行動の組による期待利潤が、非正値であればその行動の組を達成させることはないことを意味している．またどの行動の組においても正の期待利潤を生みだせなければ、プロジェクトは行われないということである．

以上で、分析に必要な個人の効用と企業の利潤を定義することができた．次章から具体的に社員と企業の行動を明らかにしていく．

後注

[1]EOC とは Expected Oppotunity Cost の頭文字を取ったものである．「期待される機会費用」という意味合いで、このように表している．

[2]後悔の反対語に相当する言葉はあいまいであるが、その選択肢を「選んで良かった」という気持ちは、その選択肢への「満足感」として捉えられるだろう．

2　分析－プレーヤーが対称な場合－

2.1　プレーヤーの対称性

この章では、プレーヤーが対称な場合について、企業の最適な行動を明らかにしていく．まず初めにプレーヤーの対称性を定義する．

定義 2.1. プレーヤーが対称であるとは、以下が成立していることである．

$$p(H, l) = p(L, h)$$

これは、頑張りが成果に結びつく確率が各プレーヤーで等しいことを意味している．つまり、同じ能力を持った２人がチームを組んでいる状況である．さらに、成功確率において１つの仮定をしておく．

仮定 2.1. $p(H, h) = p''$、$p(H, l) = p(L, h) = p'$、$p(L, l) = p$ とすれば

$$1 > p'' > p' > p = 0$$

が成立する．

これは２人とも頑張ることで最も成功の確率が高まり、１人が頑張る状況では成功の確率が下がることを表している．また、２人とも頑張らなければ成功することはないことを意味する．$p = 0$ は少々強い仮定であるが、パラメータが多くなりすぎることを避けるためにこのように設定しておく．

2.2　プレーヤーの最適行動

ではまずプレーヤーの最適応答を考えていく．今プレーヤーは対称なのでプレーヤー 1 についてのみ分析すればよい．まず (5) 式と仮定 2.1. よりプレーヤー 1 の利得をすべて書き出すと以下のようにかける．

$$\begin{aligned}
&u_1(H, h, S) = (1 + \alpha_{S1} - p'\alpha_{S1})w_1 - (1 + \alpha_{S1})c \\
&u_1(H, h, F) = -p'\alpha_{F1}w_1 - (1 + \alpha_{F1})c \\
&u_1(H, l, S) = (1 + \alpha_{S1})w_1 - (1 + \alpha_{S1})c \\
&u_1(H, l, F) = -(1 + \alpha_{F1})c
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
u_1(L,h,S) &= (1+\alpha_{S1}-p''\alpha_{S1})w_1+\alpha_{S1}c \\
u_1(L,h,F) &= -p''\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c \\
u_1(L,l,S) &= (1+\alpha_{S1}-p'\alpha_{S1})w_1+\alpha_{S1}c \\
u_1(L,l,F) &= -p'\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c
\end{aligned}
$$

今、行動の組 (a_i,a_j) におけるプレーヤー i の期待効用を $U_i(a_i,a_j)$ とすると

$$
U_i(a_i,a_j) = p(a_i,a_j)u_i(a_i,a_j,S)+(1-p(a_i,a_j))u_i(a_i,a_j,F) \tag{7}
$$

であるから、(7) 式を用いてプレーヤー 1 の期待効用を計算し整理すると

$$
\begin{aligned}
U_1(H,h) &= \{p''(1+\alpha_{S1}-p'\alpha_{S1})-(1-p'')p'\alpha_{F1}\}w_1 \\
&\quad -\{p''(1+\alpha_{S1})+(1-p'')(1+\alpha_{F1})\}c \\
U_1(H,l) &= \{p'(1+\alpha_{S1})\}w_1-\{p'(1+\alpha_{S1})+(1-p')(1+\alpha_{F1})\}c \\
U_1(L,h) &= \{p'(1+\alpha_{S1}-p''\alpha_{S1})-(1-p')p''\alpha_{F1}\}w_1 \\
&\quad +\{p'\alpha_{S1}+(1-p')\alpha_{F1}\}c \\
U_1(L,l) &= -p'\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c
\end{aligned}
$$

のようになる．これらより、プレーヤー 1 の最適応答関数を $BR_1(a_2)$ とすると

$$
BR_1(h) = \begin{cases} H & w_1 > \frac{(p''+p')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(p''-p')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \\ L & w_1 < \frac{(p''+p')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(p''-p')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \end{cases} \tag{8}
$$

$$
BR_1(l) = \begin{cases} H & w_1 > \frac{p'(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{p'(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \\ L & w_1 < \frac{p'(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{p'(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \end{cases} \tag{9}
$$

となる．(8) 式について、上式は $U_1(H,h) > U_1(L,h)$ を、下式は $U_1(H,h) < U_1(L,h)$ を満たす w_1 の条件を求めている．(9) 式についても同様に、上式は $U_1(H,l) > U_1(L,l)$ を、下式は $U_1(H,l) < U_1(L,l)$ を満たす w_1 の条件を求めている．つまり「頑張る」か「頑張らない」かの分岐点となる報酬を求めることができた．ここで、この分岐点をそれぞれ

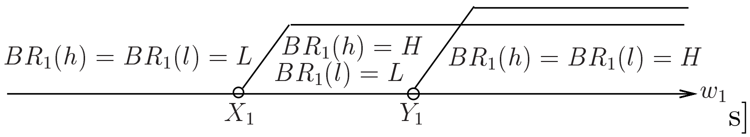
$$
X_1 = \frac{(p''+p')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(p''-p')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c
$$

$$Y_1 = \frac{p'(\alpha_{S1} - \alpha_{F1}) + 2\alpha_{F1} + 1}{p'(1 + \alpha_{S1} + \alpha_{F1})} c$$

としておく．ここでこの X_1 と Y_1 の大小関係で場合分けをし、プレーヤー 1 の行動をより詳しく示す.

$X_1 < Y_1$ の場合

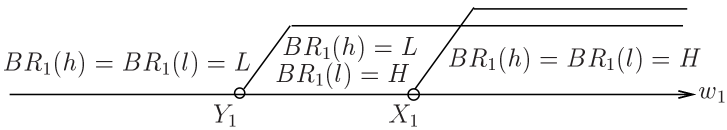
　(8)(9) 式より、この状況を図で表すと以下のようになる.



　$w_1 < X_1$ であれば、プレーヤー 2 ががどんな頑張り見せてもプレーヤー 1 は常に「頑張らない」を選択する．$X_1 < w_1 < Y_1$ であれば、プレーヤー 1 は相手と同じ行動をとるのが最適となる．また、$Y_1 < w_1$ であれば、プレーヤー 2 がどんな頑張りを見せてもプレーヤー 1 は常に「頑張る」を選択する．これらは (8)(9) 式から分かることである.

$X_1 > Y_1$ の場合

　$X_1 < Y_1$ の場合と同じように図で表すと以下のようになる.



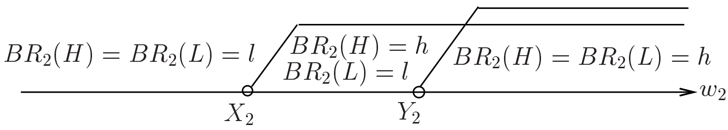
　$w_1 < Y_1$ であれば、プレーヤー 2 ががどんな頑張り見せてもプレーヤー 1 は常に「頑張らない」を選択する．$Y_1 < w_1 < X_1$ であれば、プレーヤー 1 は相手と違う行動をとるのが最適となる．また、$X_1 < w_1$ であれば、プレーヤー 2 がどんな頑張りを見せてもプレーヤー 1 は常に「頑張る」を選択する.

　これでプレーヤー 1 の行動の全てが分かった．次にプレーヤー 2 であるが、今各プレーヤーは対称であるので、彼の最適応答の分岐点は

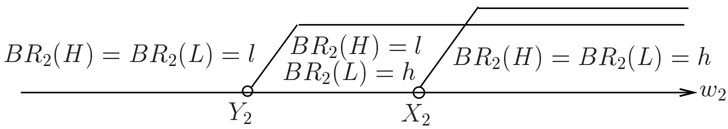
$$X_2 = \frac{(p'' + p')(\alpha_{S2} - \alpha_{F2}) + 2\alpha_{F2} + 1}{(p'' - p')(1 + \alpha_{S2} + \alpha_{F2})} c$$
$$Y_2 = \frac{p'(\alpha_{S2} - \alpha_{F2}) + 2\alpha_{F2} + 1}{p'(1 + \alpha_{S2} + \alpha_{F2})} c$$

と書くことができ、プレーヤー1と同じ図を描くことができる.

$X_2 < Y_2$ の場合



$X_2 > Y_2$ の場合



さて、ここからこのゲームの全体像を示していく．組み合わせとして (a)$X_1 < Y_1$ かつ $X_2 < Y_2$、(b)$X_1 > Y_1$ かつ $X_2 > Y_2$、(c)$X_1 < Y_1$ かつ $X_2 > Y_2$、(d)$X_1 > Y_1$ かつ $X_2 < Y_2$ の4つの状況が考えられるだろう．そしてそれぞれの状況において、各プレーヤーの報酬がどの範囲に位置するかで、ゲームのナッシュ均衡が変わってくる．以下で1つナッシュ均衡を実際に求めてみる.

今 (a) のパターンで、各プレーヤーの報酬が $w_1 < X_1$ かつ $w_2 < X_2$ だとする．すると上の図より

$$BR_1(h) = BR_1(l) = L \text{ かつ } BR_2(H) = BR_2(L) = l$$

である．ナッシュ均衡とは各プレーヤーの最適応答の交点であるから、この場合ナッシュ均衡は (L, l) となる．ただし、ここで考えているナッシュ均衡は純粋戦略ナッシュ均衡であることに注意されたい．その理由を説明するが、その前に (a) から (d) のすべての報酬の組み合わせについてナッシュ均衡を求めると以下のようになる.

$(a) X_1 < Y_1$ かつ $X_2 < Y_2$ の場合

$Y_1 < w_1$	(H, l)	(H, h)	(H, h)
$X_1 < w_1 < Y_1$	(L, l)	(H, h)、(L, l)	(H, h)
$w_1 < X_1$	(L, l)	(L, l)	(L, h)
1／2	$w_2 < X_2$	$X_2 < w_2 < Y_2$	$Y_2 < w_2$

$(b) X_1 > Y_1$ かつ $X_2 > Y_2$ の場合

$X_1 < w_1$	(H, l)	(H, l)	(H, h)
$Y_1 < w_1 < X_1$	(H, l)	(H, l)、(L, h)	(L, h)
$w_1 < Y_1$	(L, l)	(L, h)	(L, h)
1／2	$w_2 < Y_2$	$Y_2 < w_2 < X_2$	$X_2 < w_2$

$(c) X_1 < Y_1$ かつ $X_2 > Y_2$ の場合

$Y_1 < w_1$	(H, l)	(H, l)	(H, h)
$X_1 < w_1 < Y_1$	(L, l)	$\times$	(H, h)
$w_1 < X_1$	(L, l)	(L, h)	(L, h)
1／2	$w_2 < Y_2$	$Y_2 < w_2 < X_2$	$X_2 < w_2$

$(d) X_1 > Y_1$ かつ $X_2 < Y_2$ の場合

$X_1 < w_1$	(H, l)	(H, h)	(H, h)
$Y_1 < w_1 < X_1$	(H, l)	$\times$	(L, h)
$w_1 < Y_1$	(L, l)	(L, l)	(L, h)
1／2	$w_2 < X_2$	$X_2 < w_2 < Y_2$	$Y_2 < w_2$

表中の×印については、ナッシュ均衡が存在しないことを意味している.

さて、今 (a) のゲームを例に考える．例えば $w_1 < X_1$ の場合、プレーヤー１の最適応答を見直してみると、相手がどの行動を取ったとしても L を選択することが分かる．これは言うまでもなく支配戦略である．そしてこの支配戦略におけるナッシュ均衡が存在しており、(a) の表で言うと $w_1 < X_1$ かつ $w_2 < X_2$、$Y_1 < w_1$ かつ $w_2 < X_2$、$w_1 < X_1$ かつ $Y_2 < w_2$、$Y_1 < w_1$ かつ $Y_2 < w_2$ の場合がそうである．では他の場合はどうだろうか．まず $w_1 < X_1$ かつ $X_2 < w_2 < Y_2$、$Y_1 < w_1$ かつ $X_2 < w_2 < Y_2$、$X_1 < w_1 < Y_1$ かつ $w_2 < X_2$、$X_1 < w_1 < Y_1$ かつ $Y_2 < w_2$ の場合はどちらか一方のプレーヤーが支配戦略に従って行動している状況である．つまりもう一方のプレーヤーは相手の行動を予測できるので、それに対する純粋戦略で対応すればよい．(a) ではその状況に均衡が存在しており、それは純粋戦略ナッシュ均衡である．さて最後の $X_1 < w_1 < Y_1$ かつ $X_2 < w_2 < Y_2$ の場合であるが、見てわかる通り、この場合には純粋戦略ナッシュ均衡が２つ存在し、プレーヤーがどの均衡に落ち着くのかを考えなければならない．つまり混合戦略、あるいは均衡選択の問題を考えなければならない．しかし、ここでそれらを考えるのは議論が複雑化するので、この問題を深く取り上げることはせず、以下を仮定することにより議論を進める．

仮定 2.2. ゲームに (H,h) と (L,l) の２つの均衡が存在する場合には、常に (H,h) の均衡が達成される．

これによってすべてのゲームは純粋戦略ナッシュ均衡だけを考慮して議論を進めていいことになる．ちなみに均衡選択の問題に少し触れておくと、基本的には、利得支配[1]する均衡が選択されるという理論である．そこで利得支配について確かめてみると、均衡 (H,h) が均衡 (L,l) を利得支配している場合と、していない場合の両方が存在することが確認できた．具体的には $U_i(H,h) > U_i(L,l)$ となる場合もあるし、$U_i(H,h) < U_i(L,l)$ となる場合もあり、任意のパラメーターにおいて一方的な大小関係が成り立たないということである．

2.3 企業の最適行動

さて、このゲームにおいて企業側に最も望ましい報酬はもちろん、期待利潤を最大化するような報酬である．そこで、期待利潤関数の (6) 式と上の $(a)(b)(c)(d)$ の表

を用いて最大となる期待利潤を書き出してみると、全ての場合において

$$\begin{aligned}
&\max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) = p''\{\pi - (X_1 + X_2)\} \\
&\max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) = p'(\pi - Y_1) \\
&\max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) = p'(\pi - Y_2) \\
&\max_{w_1,w_2} \Pi(L,l) = 0
\end{aligned}$$

となることが分かる．なお、全ての場合において期待利潤が同じであるから、それぞれのケースで場合分けを行う必要はない．さて、これらは上の 4 つの表から分かる、それぞれの行動の組を引き出すために必要な最小の報酬を、1 章で定義した期待利潤関数に代入している．つまりそれぞれの行動の組における期待利潤の最大値である．しかし、X_i、Y_i にはプレーヤーの性格が含まれていることから、次に考えるべきことは、プレーヤーの性格に関してそれぞれの期待利潤を最大化することである．最も期待利潤が高くなる人を選ぶということである．そこから最終的に、最も期待利潤が高くなるプレーヤーの行動の組はどれかを考えていく．

ただし、最適な 2 人を選ぶ際に注意しておくべきことがある．今、期待利潤 $\Pi(H,h)$ を最大化する際、同じ性格を持った 2 人を選ぶことが最適であることが予想できる．なぜなら、期待利潤の式を見てみると、期待利潤の最大化は X_1 と X_2 の最小化であることが分かり、さらに X_1 と X_2 の違いは α の違いのみであることより、同じ α が最適解として出てくるからである．以上より、次を仮定して議論を進める．

仮定 2.3. 会社側は同じ α_i を持ち合わせた社員を 2 人選ぶことができる．

さて、以下で期待利潤を α に関して最大化していくが、すべての場合の問題を解く必要はない．それぞれの場合は、X_i か Y_i の最小化問題に言い換えることができるだろう．つまり X_i と Y_i の最小化問題を先に解いて、その結果を用いて期待利潤の最大化問題を考える．

X_i の最小化問題

ではまず、X_i を α_{Si}、α_{Fi} に関して最小化する．解くべき問題は以下のようにか

ける．

$$\min_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \; X_i$$
$$s.t. \quad \alpha_{Si} \geq 0$$
$$\alpha_{Fi} \geq 0$$
$$1-\alpha_{Si} \geq 0$$
$$1-\alpha_{Fi} \geq 0$$

α_{Ri} は $[0,1]$ 区間の実数なので、制約は上のようになるだろう．ではこの問題を Fritz John 条件 (以下 FJ)[2]を用いて解く．ラグランジュ乗数を $\lambda_i(i=0,\cdots,4)$ とし、ラグランジュ関数を以下のように定義する．

$$\mathcal{L} = -\lambda_0 X_i + \lambda_1\alpha_{Si} + \lambda_2\alpha_{Fi} + \lambda_3(1-\alpha_{Si}) + \lambda_4(1-\alpha_{Fi})$$

よって 1 階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Si}} = -\lambda_0 \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_{Si}} + \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \tag{10}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Fi}} = -\lambda_0 \frac{\partial X_i}{\partial \alpha_{Fi}} + \lambda_2 - \lambda_4 = 0 \tag{11}$$

となる．ちなみに X_i は α_{Si} と α_{Fi} の四則演算により構成されているので、微分可能性は自明である．ではまず、目的関数に付随するラグランジュ乗数 λ_0 が正であることを示しておく．

証明. $\lambda_0 > 0$ を示すために背理法の仮定より、$\lambda_0 = 0$ であるとする．

以下、解による場合分けをする．まず解が $\alpha_{Si} = 0$ である場合、相補スラック条件より、λ_1 は任意の実数である．また $1-\alpha_{Si} > 0$ となるから相補スラック条件より $\lambda_3 = 0$ となる．よって (10) 式に $\lambda_0 = 0$、$\lambda_3 = 0$ を代入すると、$\lambda_1 = 0$ となる．この時 $\alpha_{Fi} = 0$、$\alpha_{Fi} = 1$、$0 < \alpha_{Fi} < 1$ それぞれの場合を考える．
まず $\alpha_{Fi} = 0$ の時、相補スラック条件より λ_2 は任意の実数であり、$\lambda_4 = 0$ となる．よって (11) 式に $\lambda_0 = 0$ と $\lambda_4 = 0$ を代入すると $\lambda_2 = 0$ となる．よって $\alpha_{Si} = 0$ かつ $\alpha_{Fi} = 0$ の時、非ゼロ条件に矛盾するから $\lambda_0 > 0$ である．

$\alpha_{Fi} = 1$ の時、相補スラック条件より λ_4 は任意の実数であり、$\lambda_2 = 0$ となる．よって (11) 式に $\lambda_0 = 0$ と $\lambda_2 = 0$ を代入すると $\lambda_4 = 0$ となる．よって $\alpha_{Si} = 0$ か

つ $\alpha_{Fi}=1$ の時、非ゼロ条件に矛盾するから $\lambda_0>0$ である．

解が $0<\alpha_{Fi}<1$ である場合、相補スラック条件より $\lambda_2=0$ であり、$\lambda_4=0$ となる．つまり $\alpha_{Si}=0$ かつ $0<\alpha_{Fi}<1$ の時、非ゼロ条件に矛盾するから $\lambda_0>0$ である．

また、$\alpha_{Si}=1$ の場合と $0<\alpha_{Si}<1$ の場合も同様に $\lambda_0>0$ を示すことができる．故に $\lambda_0>0$ であると分かる． □

$\lambda_0>0$ より $\lambda_0=1$ に基準化する．すると (10)(11) 式は

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha_{Si}}=-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}+\lambda_1-\lambda_3=0 \tag{12}$$
$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\alpha_{Fi}}=-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}+\lambda_2-\lambda_4=0 \tag{13}$$

となる．

さて、次に $\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}$、$\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}$ を計算すると

$$\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}=\frac{(p''-p')(p''+p'-1)(2\alpha_{Fi}+1)}{\{(p''-p')(1+\alpha_{Si}+\alpha_{Fi})\}^2}c$$

$$\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}=\frac{(p''-p')(1-p''-p')(2\alpha_{Si}+1)}{\{(p''-p')(1+\alpha_{Si}+\alpha_{Fi})\}^2}c$$

のようになる．これらを見てみると、$p''+p'>1$ の場合には $\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}>0$、$\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}<0$ であり、$p''+p'<1$ の場合には $\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}<0$、$\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}>0$ であることが分かる．よって以下この 2 つの場合に分けて考える．

$(i)p''+p'>1$ の場合

$\lambda_1>0$ を示す．背理法より $\lambda_1=0$ とすると、$-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}-\lambda_3=0$ となるが、今 $\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}>0$ であり $-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}-\lambda_3<0$ であるから矛盾．ゆえに $\lambda_1>0$ となる．よって相補スラック条件より $\alpha_{Si}=0$ となる．

さらに $\lambda_4>0$ を示す．背理法より $\lambda_4=0$ とすると、$-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}+\lambda_2=0$ となるが、今 $\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}<0$ であり $-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Fi}}+\lambda_2>0$ であるから矛盾．ゆえに $\lambda_4>0$ となる．よって相補スラック条件より $1-\alpha_{Fi}=0$、つまり $\alpha_{Fi}=1$ となる．

$(ii)p''+p'<1$ の場合

$\lambda_3>0$ を示す．背理法より $\lambda_3=0$ とすると、$-\frac{\partial X_i}{\partial\alpha_{Si}}+\lambda_1=0$ となり矛盾．ゆえ

に $\lambda_3 > 0$ となる．よって相補スラック条件より $1 - \alpha_{Si} = 0$、つまり $\alpha_{Si} = 1$ となる．

さらに $\lambda_2 > 0$ を示す．背理法より $\lambda_2 = 0$ とすると、$-\frac{\partial X_i}{\partial \alpha_{Fi}} - \lambda_4 = 0$ となり矛盾．ゆえに $\lambda_2 > 0$ となる．よって相補スラック条件より $\alpha_{Fi} = 0$ となる．

最後に解の存在であるが、今 α に関する制約集合は非空なコンパクト集合であるので、ワイエルシュトラスの定理より解の存在が確認できる．よって、この問題の解は

$$(\alpha_{Si}, \alpha_{Fi}) = (0, 1) \quad if \quad p'' + p' > 1 \tag{14}$$
$$(\alpha_{Si}, \alpha_{Fi}) = (1, 0) \quad if \quad p'' + p' < 1 \tag{15}$$

であると分かる．さらにこの時の報酬 w_i は、以上の解を X_i に代入して

$$w_i = \frac{3 - (p'' + p')}{2(p'' - p')}c \quad if \quad p'' + p' > 1 \tag{16}$$
$$w_i = \frac{p'' + p' + 1}{2(p'' - p')}c \quad if \quad p'' + p' < 1 \tag{17}$$

となる．

Y_i の最小化問題

次に Y_i の最小化問題を考える．解くべき問題は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_{Si}, \alpha_{Fi}} \ & Y_i \\ s.t. \quad \alpha_{Si} &\geq 0 \\ \alpha_{Fi} &\geq 0 \\ 1 - \alpha_{Si} &\geq 0 \\ 1 - \alpha_{Fi} &\geq 0 \end{aligned}$$

これを FJ を用いて解く．ラグランジュ乗数を $\mu_i (i = 0, \cdots, 4)$ とすると、ラグランジュ関数は以下のようになる．

$$\mathcal{L} = -\mu_0 Y_i + \mu_1 \alpha_{Si} + \mu_2 \alpha_{Fi} + \mu_3 (1 - \alpha_{Si}) + \mu_4 (1 - \alpha_{Fi})$$

よって1階の条件は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Si}} = -\mu_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Si}} + \mu_1 - \mu_3 = 0$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Fi}} = -\mu_0 \frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Fi}} + \mu_2 - \mu_4 = 0$$

まず $\mu_i > 0$ を示すのだが、これは X_i での証明と同様であるので省略する．さて $\mu_i = 1$ に基準化すると

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Si}} = -\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Si}} + \mu_1 - \mu_3 = 0 \tag{18}$$
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha_{Fi}} = -\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Fi}} + \mu_2 - \mu_4 = 0 \tag{19}$$

となる．次に $\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Si}}$、$\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Fi}}$ を計算すると

$$\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Si}} = \frac{p'(p'-1)(2\alpha_{Fi}+1)}{\{p'(1+\alpha_{Si}+\alpha_{Fi})\}^2} c < 0$$
$$\frac{\partial Y_i}{\partial \alpha_{Fi}} = \frac{p'(1-p')(2\alpha_{Si}+1)}{\{p'(1+\alpha_{Si}+\alpha_{Fi})\}^2} c > 0$$

であると分かる．これと (18)(19) 式を用いれば、X_i の最小化問題と同様に解けて、その解は

$$(\alpha_{Si}, \alpha_{Fi}) = (1, 0) \tag{20}$$

となる．さらにこの時の報酬 w_i は、以上の解を Y_i に代入して

$$w_i = \frac{p'+1}{2p'} c \tag{21}$$

となる．

さて (16)(17)(21) の最適な報酬、つまり報酬の最小値を期待利潤に代入すると以下のようになる．

$p'' + p' > 1$ **の場合**

$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) = p'' \left(\pi - \frac{3-p''-p'}{p''-p'} c \right)$$
$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) = \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) = p' \left(\pi - \frac{p'+1}{2p'} c \right)$$

$p'' + p' < 1$ の場合

$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) = p''\left(\pi - \frac{p''+p'+1}{p''-p'}c\right)$$
$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) = \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) = p'\left(\pi - \frac{p'+1}{2p'}c\right)$$

なお、仮定 1.3. より企業は行動組 (L,l) を達成させることはない．もちろん $\Pi(L,l) = 0$ だからである．よって $\Pi(L,l)$ は考慮しない．また $\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h)$、$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l)$ についても非正値を取る可能性がある．しかし、それも考慮しながら進めるのは議論が複雑化しすぎるので、あらかじめこれらが正になるように以下を仮定しておく．

仮定 2.4. プレーヤーが対称である時、π,c,p'',p' について

$$\pi - \frac{3-p''-p'}{p''-p'}c > 0 \text{ かつ } \pi - \frac{p''+p'+1}{p''-p'}c > 0 \text{ かつ } \pi - \frac{p'+1}{2p'}c > 0$$

が成り立っているとする．

これによって $\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h)$ と $\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l)$ はどちらも正となるから、後はこれらの大小関係により場合分けをし、企業が達成すべき行動組を求めればよいことになる．では最後にそれを考えていく．

$p'' + p' > 1$ の場合における企業の最適行動

企業にとって (H,h) が望ましい時、以下が成立する．

$$\begin{aligned} &\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) > \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) \\ \Leftrightarrow\ & p''\left(\pi - \frac{3-p''-p'}{p''-p'}c\right) > p'\left(\pi - \frac{p'+1}{2p'}c\right) \end{aligned} \tag{22}$$

(22) 式は (H,h) で頑張らせることが、企業の期待利潤を最大化させる条件であるが、この式からのインプリケーションは捉え難い．なので、この式を書き直すと

$$2(k+1)p''^2 + \{-5 + (3-4k)p'\}p'' + (2k-1)p'^2 - p' > 0$$

となり、これを解くと

$$p'' > \frac{5-(3-4k)p' + \sqrt{(17-32k)p'^2 + (48k-22)p' + 25}}{4(k+1)} \tag{23}$$

または

$$p'' < \frac{5-(3-4k)p' - \sqrt{(17-32k)p'^2 + (48k-22)p' + 25}}{4(k+1)} \tag{24}$$

となる．ただし、$k = \frac{\pi}{c}$ である．では (23)(24) 式を用いて、行動組における期待利潤の分岐曲線を描くと以下のようになる．

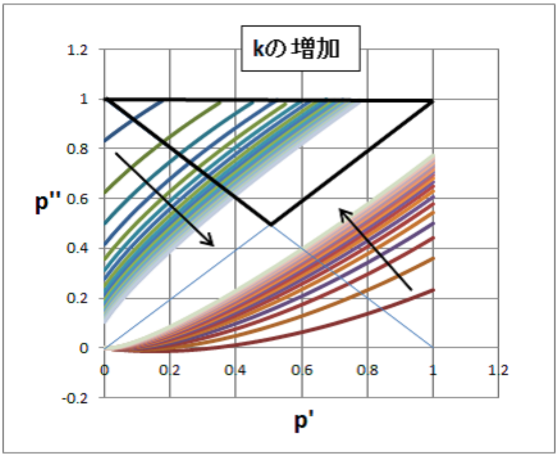


図 1　$p'' + p' > 1$ の場合の期待利潤の分岐曲線

この図は Excel を用いて、k を 2 から 1 ずつ増やしていった状況を描いたものである．また、図中の太枠の三角形は $p'' > p'$ かつ $p'' + p' > 1$ の領域を示している．さてまず図の左上半分の曲線は (23) 式に関するものである．(23) 式が意味していることを図で説明すると、それぞれの k での分岐曲線の左上の領域では、(H, h) で働かせることが最適であるということである．逆に分岐曲線の右下にある確率の組においては (H, l) または (L, h) で働かせることが最適となる．

また、図の右下半分の曲線は (24) 式に関するものである．しかしこれらの領域は $p'' < p'$ であるから、確率の定義を満たしていない領域である．つまり図だけを見ると (24) 式は考慮する必要がない．

ちなみに、図がこのような形状であることを確かめるためには、左上の曲線につい

ては分岐曲線の p' に関する 1 階微分が正、2 階微分が負であることを示せばよい．

また、k が無限に大きくなっていくとこの分岐曲線がどういった曲線に収束するのかを確かめておく必要がある．まず (23) 式について、k が無限に大きくなると

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty}\frac{5-(3-4k)p'+\sqrt{(17-32k)p'^2+(48k-22)p'+25}}{4(k+1)}\\
&=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{5}{k}-\left(\frac{3}{k}-4\right)p'+\sqrt{\left(\frac{17}{k^2}-\frac{32}{k}\right)p'^2+\left(\frac{48}{k}-\frac{22}{k^2}\right)p'+\frac{25}{k^2}}}{4\left(1+\frac{1}{k}\right)}\\
&=p'
\end{aligned}$$

つまり k が無限に大きい時、$p''>p'$ となる．また (23) 式の右辺と (24) 式の右辺の違いは根号の前につく符号だけなので、(24) 式に関して、k が無限に大きくなっても $p''<p'$ であるから、やはり考慮する必要がないことが分かる．

では図 1 から分かることをまとめておく．まず k が大きくなると (H,h) が最適である領域が大きくなことが分かるが、$k=\frac{\pi}{c}$ なので π が大きくなるにつれてその領域が大きくなることが分かる．つまり π が大きくなるにつれて、(H,h) でやらせたほうがいい仕事が多くなる．また、左上の領域にいくほど、つまり p'' と p' の差が大きいほど、(H,h) で頑張らせたほうがいいことが分かる．この場合の企業の最適行動をまとめておく．

結果 2.1. プレーヤーが対称でありかつ $p''+p'>1$ が満たされる時、企業にとって最適なプレーヤーの性格と報酬は

$p''\left(\pi-\frac{3-p''-p'}{p''-p'}c\right)>p'\left(\pi-\frac{p'+1}{2p'}c\right)$ の場合

$$\begin{aligned}
(\alpha_{S1},\alpha_{F1})&=(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=(0,1)\\
w_1=&w_2=\frac{3-(p''+p')}{2(p''-p')}c
\end{aligned}$$

$p''\left(\pi-\frac{3-p''-p'}{p''-p'}c\right)<p'\left(\pi-\frac{p'+1}{2p'}c\right)$ の場合

$$\begin{aligned}
(\alpha_{Si},\alpha_{Fi})=(1,0)、(\alpha_{Sj},\alpha_{Fj})=[0,1]^2\text{内の任意の組}\\
w_i=\frac{p'+1}{2p'}c、w_j=0
\end{aligned}$$

となる．

$p'' + p' < 1$ の場合における企業の最適行動

企業にとって (H, h) が望ましい時、以下が成立する．

$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) > \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l)$$
$$\Leftrightarrow p''\left(\pi - \frac{p''+p'+1}{p''-p'}c\right) > p'\left(\pi - \frac{p'+1}{2p'}c\right) \tag{25}$$

この式からもインプリケーションを得づらいので、式を書き直すと

$$2(k-1)p''^2 - \{(4k+1)p'+1\}p'' + (2k-1)p'^2 - p' > 0$$

となり、これを解くと

$$p'' > \frac{(4k+1)p'+1+\sqrt{(32k-7)p'^2+(16k-6)p'+1}}{4(k-1)} \tag{26}$$

または

$$p'' < \frac{(4k+1)p'+1-\sqrt{(32k-7)p'^2+(16k-6)p'+1}}{4(k-1)} \tag{27}$$

となる．(26)(27) 式を用いて、分岐曲線を描くと以下のようになる．

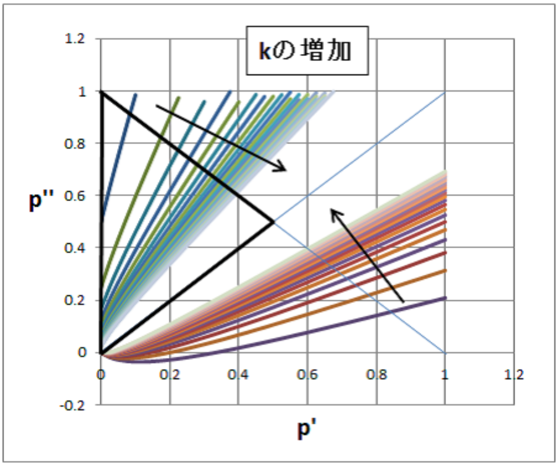


図 2　$p'' + p' < 1$ の場合の期待利潤の分岐曲線

上の図 2 は図 1 と同様に、k を 2 から 1 ずつ増やしていった状況を描いたものである．また、太枠の三角形は $p'' > p'$ かつ $p'' + p' < 1$ の領域を示している．図 2 の左

上半分の曲線は (26) の表す領域であり、右下半分の曲線は (27) 式の領域である．図 1 同様に (27) 式の示す領域は $p'' < p'$ に入っており、確率の定義を満たしていない領域であるから考慮する必要はない.

また、k が無限に大きくなっていく状況も考えておく．まず (26) 式について、k が無限に大きくなると

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(4k+1)p'+1+\sqrt{(32k-7)p'^2+(16k-6)p'+1}}{4(k-1)}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\left(4+\frac{1}{k}\right)p'+\frac{1}{k}+\sqrt{\left(\frac{32}{k}-\frac{7}{k^2}\right)p'^2+\left(\frac{16}{k}-\frac{6}{k^2}\right)p'+\frac{1}{k^2}}}{4\left(1-\frac{1}{k}\right)}=p'$$

つまり k が無限に大きい時、$p'' > p'$ となる．また (27) 式についても符号の違いのみであるから、$p'' < p'$ に収束することが分かる.

では図 2 から分かることをまとめるが、見て分かる通り、基本的に図 1 と同じ傾向があることが分かる．つまり π が大きくなるにつれて (H,h) でやらせたほうがいい仕事が多くなり、また、p'' と p' の差が大きいほど (H,h) で頑張らせたほうがいいことが分かる．この場合の企業の最適行動をまとめておく.

結果 2.2. プレーヤーが対称でありかつ $p''+p'<1$ が満たされる時、企業にとって最適なプレーヤーの性格と報酬は
$p''\left(\pi-\frac{p''+p'+1}{p''-p'}c\right)>p'\left(\pi-\frac{p'+1}{2p'}c\right)$ の場合

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1})=(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=(1,0)$$
$$w_1=w_2=\frac{p''+p'+1}{2(p''-p')}c$$

$p''\left(\pi-\frac{p''+p'+1}{p''-p'}c\right)<p'\left(\pi-\frac{p'+1}{2p'}c\right)$ の場合

$$(\alpha_{Si},\alpha_{Fi})=(1,0)、(\alpha_{Sj},\alpha_{Fj})=[0,1]^2\text{内の任意の組}$$
$$w_i=\frac{p'+1}{2p'}c、w_j=0$$

となる.

2.4 考察

結果 2.1. と 2.2. の解釈を考えていく．まず $p''+p'>1$ と $p''+p'<1$ の $p''+p'$ の部分であるが、これは確率の定義に戻ると、プレーヤー２人がともに頑張った時の成功確率と、どちらか一方のプレーヤーのみが頑張った時の成功確率の和である．今、その値が 1 を超えるか超えないかという状況を広い意味で解釈すると、$p''+p'>1$ の場合は比較的に「簡単なプロジェクト」、逆に $p''+p'<1$ の場合は比較的に「難しいプロジェクト」であるととらえられる.

では結果 2.1. を考えていく．これは $p''+p'>1$ の下での結果であるから、比較的簡単なプロジェクトであると言える．まず企業にとって (H,h) が最適の場合を考える．その条件式は (22) 式であるが、直接的な教訓は示し難い．しかし「π が大きい」あるいは「p'' と p' の差が大きい」ほど (H,h) が最適な仕事が多いことが分かっている．さて、この時の最適な α の組み合わせを見てみると、α_{Si} は小さな値を取り、α_{Fi} が大きな値を取るほうがいいという結果である．これは、成功した場合には自分が取らなかった選択について何も考えず、失敗した時には自分の取らなかった選択をよく考える人がいいという結果である．つまり、仮に「頑張る」を選択して成功した時は、簡単な仕事である分手を抜けば良かったという「後悔」が存在するだろうが、α_{Si} が小さい分その後悔は小さい．また「頑張らない」を選んで失敗すると、簡単な仕事である分成功しやすいので「頑張る」を選んでおけば良かったという「後悔」が存在し、α_{Fi} が大きい分その後悔も大きくなる．まとめると、簡単な仕事でかつ (H,h) が最適な場合には「成功には動じず、失敗に敏感な人」を２人選ぶべきだということである．次に企業にとって (H,l) または (L,h) が最適な場合を考える．この場合「π が小さい」あるいは「p'' と p' の差が小さい」といった仕事であるほど (H,l) または (L,h) が最適となる仕事が多くなることが分かっている．さて、最適な性格であるが、この時は 1 人だけを頑張らせるので、もう 1 人はどんな性格の人を選んでもよい、あるいは雇わなくてもいいと考えられる．頑張らせたい人の性格については、α_{Si} は大きな値を取り、α_{Fi} が小さな値を取るほうがいいという結果である．つまり成功した場合には自分が取らなかった行動についてよく考え、失敗した場合には自分の取らなかった行動について何も考えない人が好ましいことになる．これは $p=0$ に

しているので「頑張らない」を選べば成功の可能性はないことから、「頑張る」を選んで成功した時の喜びの大きい人を選ぶことが望ましいと考えられる．まとめると、(H, l) または (L, h) が最適な場合には「成功に敏感で、失敗に動じない人」を１人選べばよい．もう１人はどんな性格でもよい．

結果 2.2. を考える．この時 $p'' + p' < 1$ であるから、比較的難しいプロジェクトである．まず (H, h) が最適な場合を考える．この場合も「π が大きい」あるいは「p'' と p' の差が大きい」ほど (H, h) が最適となる仕事が多いことが分かっている．最適な α は、α_{Si} が大きな値を取り、α_{Fi} が小さな値を取るほうがいいという結果である．つまり、難しい仕事である分、頑張ったことで成功した時の「満足感」が大きい人がよく、また頑張って失敗しても、頑張らなければ良かったと後悔しない人がいいということを意味する．まとめると、(H, h) が最適な場合には「成功に敏感で、失敗に動じない人」を２人選ぶべきだということである．次に (H, l) または (L, h) が最適な場合を考えるが、これは $p = 0$ に変わりがないので、結果 2.1. と同じである．

以下に考察をまとめる．

考察 2.1. プレーヤーが対称な場合に企業がチームに選ぶべき２人は
行動組 (H, h) が最適な場合

難しい仕事 :「失敗に動じず成功に敏感な２人」

簡単な仕事 :「成功に動じず失敗に敏感な２人」

行動組 (H, l) または (L, h) が最適な場合

「失敗に動じず成功に敏感な人」と「任意の性格を持った人」

である．また (H, h) が最適であれば

「πが大きい」または「p''と p'の差が大きい」

という場合が多く、(H, l) または (L, h) が最適であれば

「πが小さい」または「p''と p'の差が小さい」

という場合が多い．

性格に関して、難しい仕事には失敗を恐れずチャレンジしていける人がよく、簡単な仕事は怠けがちになるからこそしっかりできる人がいいといったイメージが、我々の直感的な部分で少なからずあるだろう．そう考えると、上の考察結果は直感的にも合っている部分が多く、我々のイメージにも説得力を持たせてくれるモデルなのではないかと思われる．

次に報酬の考察を行う．まず行動組 (H, l) または (L, h) が最適な場合の報酬は 1 パターンしかないので、そちらを先に考察する．この時の報酬は $w_i = \frac{p'+1}{p'}c$、$w_j = 0$ である．今 w_j はおいておくとして、w_i を p' で微分してみると

$$\frac{dw_i}{dp'} = -\frac{1}{2p'^2}c < 0$$

となる．つまり、成功確率が大きくなるにつれて報酬は下がることを意味している．これは直感に合う報酬体系である．もう 1 人については頑張りを引き出す必要がないので報酬は 0 で問題はない．

次に (H, h) が最適な場合を見てみる．今 $p'' - p'$ は一定だとする．まず $p'' + p' > 1$ の場合、つまり簡単な仕事である場合には、$w_i = w_j = \frac{3-(p''+p')}{2(p''-p')}c$ より $p'' + p'$ が大きいほど報酬が下がることが分かる．簡単な仕事であればあるほど報酬を下げたほうがいいということになる．一方で、$p'' + p' < 1$ の場合、つまり難しい仕事の場合には $w_i = w_j = \frac{p''+p'+1}{2(p''-p')}c$ であるから、$p'' + p'$ が小さいほど報酬が下がることが分かる．仕事が難しければ難しいほど報酬も下げたほうがいいことになる．これらの全体像を考えてみると $p'' + p' = 1$ のところで報酬が最大になっており、そこを頂点に山なりの報酬体系となっている．以下はイメージ図である．

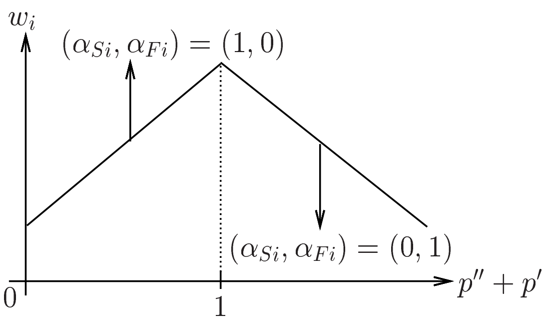


図 3　報酬の全体像

この図３から分かることは、極めて難しい仕事には α_{Si} の高い人を選ぶことで、成功した時の満足感がより高いがために少ない報酬でもうまく頑張りを引き出しているように見える．また、極めて簡単な仕事には α_{Fi} の高い人を選び、失敗した時の後悔がより大きいのでより少ない報酬でもうまく頑張りを引き出しているように見える．賃金の考察においても企業の最適な行動が読み取れることが分かる．

次に $p'' + p'$ が一定だとする．この時、難しい仕事であれ簡単な仕事であれ、p'' と p' の差が大きいほど報酬が低くなり、差が小さいほど高くなることが分かる．これは企業としては、どちらかが頑張らなくなることを避けるために、報酬を高く設定しているのだと考えられる．しかし、p'' と p' の差が小さいほど (H, l) または (L, h) が企業にとって最適である場合が多くなるという結果があった．これより差が小さいほど報酬は高まっていくが、その差がある値より小さくなれば企業は２人に頑張らせることを諦め、１人に頑張らせることを選択するのである．また逆に差が大きいと、プレーヤーのサボろうとするインセンティブが低くなっていくと考えられるから、報酬を下げることができるのである．この結果も、p'' と p' の差が小さいほど (H, h) が最適である場合が多くなるという先ほどの結果に合っている．この結果も以下にまとめておく．

考察 2.2. 対称な２人のプレーヤーの報酬には以下の特徴がある．

(H, l) または (L, h) が最適な場合

「頑張る」を選ぶプレーヤーの報酬：成功確率がが高いほど報酬は低い．

「頑張らない」を選ぶプレーヤーの報酬：常に 0.

(H, h) が最適な場合

p'' と p' の差が

大きくなるにつれて、２人の報酬は下がる．

小さくなるにつれて、２人の報酬は高まる．

ただし、その差がある値よりも小さくなると (H, l) または (L, h) が最適になる．

後注

[1]均衡選択の理論は Harsanyi and Selten(1988) である．ちなみに、今ある 2 つの均衡点 A,B があって、均衡点 A が均衡点 B を利得支配するとは、任意のプレーヤーにとって均衡点 A での利得が均衡点 B の利得よりも高いことをいう．そのときプレーヤーたちはお互いが高い利得における均衡を望むだろうと予測しあうと考えられるので、利得支配している均衡が実現すると考えられている．

[2]O.L. Mangasarian(1987)Nonlinear Programming が詳しい．

3　分析－プレーヤーが非対称な場合－

3.1　プレーヤーの非対称性

今まで、プレーヤーが対称である場合について分析を進めてきた．しかし、現実には各プレーヤーの能力には差があり、個々がチームの成果に与える影響は常に同じであるとは限らない．よって次にプレーヤーが非対称である場合を考える．まずはプレーヤーの非対称性を以下に定義する．

定義 3.1. プレーヤーが非対称であるとは

$$p(H,l) > p(L,h) \; or \; p(L,h) > p(H,l)$$

のどちらかが成立していることである．

これは頑張りが成果に結びつく確率が各プレーヤー間で等しくなく、どちらかの頑張りがチームの成果に、より大きな影響を持つ場合である．つまり能力に差のある２人がチームを組んでいる状況である．また、成功確率において以下を仮定しておく．

仮定 3.1. $p(H,h) = q''$、$p(H,l) = \overline{q}'$、$p(L,h) = q'$、$p(L,l) = q$ とすれば

$$1 > q'' > \overline{q}' > q' > q = 0$$

が成立する．

２人とも頑張ることで最も成功の確率が高まり、二人とも頑張らなければ成功する確率は 0 となるのは、プレーヤーが対称である場合と同じである．また上の仮定では、$\overline{q}' > q'$ つまり $p(H,l) > p(L,h)$ であるから、非対称性として、プレーヤー１がプレーヤー２に対して、チームの成果により大きな影響力を持つとしている．

3.2　プレーヤーの最適行動

では実際に分析を行っていく．今プレーヤーは非対称であるので、各プレーヤーごとに最適応答を求めることにする．まずプレーヤー１からみていく．

プレーヤー1の最適応答

さて、(5) 式と仮定 3.1. よりプレーヤー1の結果の効用を全て書き出すと以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
u_1(H,h,S) &= (1+\alpha_{S1}-q'\alpha_{S1})w_1-(1+\alpha_{S1})c \\
u_1(H,h,F) &= -q'\alpha_{F1}w_1-(1+\alpha_{F1})c \\
u_1(H,l,S) &= (1+\alpha_{S1})w_1-(1+\alpha_{S1})c \\
u_1(H,l,F) &= -(1+\alpha_{F1})c \\
u_1(L,h,S) &= (1+\alpha_{S1}-q''\alpha_{S1})w_1+\alpha_{S1}c \\
u_1(L,h,F) &= -q''\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c \\
u_1(L,l,S) &= (1+\alpha_{S1}-\overline{q}'\alpha_{S1})w_1+\alpha_{S1}c \\
u_1(L,l,F) &= -\overline{q}'\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c
\end{aligned}
$$

(7) 式を用いてプレーヤー1の期待効用を計算し整理すると

$$
\begin{aligned}
U_1(H,h) &= \{q''(1+\alpha_{S1}-q'\alpha_{S1})-(1-q'')q'\alpha_{F1}\}w_1 \\
&\quad -\{q''(1+\alpha_{S1})+(1-q'')(1+\alpha_{F1})\}c \\
U_1(H,l) &= \{\overline{q}'(1+\alpha_{S1})\}w_1-\{\overline{q}'(1+\alpha_{S1})+(1-\overline{q}')(1+\alpha_{F1})\}c \\
U_1(L,h) &= \{q'(1+\alpha_{S1}-q''\alpha_{S1})-(1-q')q''\alpha_{F1}\}w_1+\{q'\alpha_{S1}+(1-q')\alpha_{F1}\}c \\
U_1(L,l) &= -\overline{q}'\alpha_{F1}w_1+\alpha_{F1}c
\end{aligned}
$$

となる. これらよりプレーヤー1の最適応答関数を求めると

$$
BR_1(h)=\begin{cases} H & w_1 > \frac{(q''+q')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(q''-q')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \\ L & w_1 < \frac{(q''+q')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(q''-q')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \end{cases} \tag{28}
$$

$$
BR_1(l)=\begin{cases} H & w_1 > \frac{\overline{q}'(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{\overline{q}'(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \\ L & w_1 < \frac{\overline{q}'(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{\overline{q}'(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \end{cases} \tag{29}
$$

となる. 求め方については、プレーヤーが対称である場合と同じである. またここでも、これらの分岐点をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_1 &= \frac{(q''+q')(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{(q''-q')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c \\
\overline{Y}_1 &= \frac{\overline{q}'(\alpha_{S1}-\alpha_{F1})+2\alpha_{F1}+1}{\overline{q}'(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1})}c
\end{aligned}
$$

としておく.

プレーヤー２の最適応答

さて、プレーヤー２の最適応答も同様に求めていく．(5) 式と仮定 3.1. よりプレーヤー２の結果の効用を全て書き出すと以下のようになる.

$$
\begin{aligned}
u_2(H,h,S) &= (1+\alpha_{S2}-\overline{q}'\alpha_{S2})w_2-(1+\alpha_{S2})c \\
u_2(H,h,F) &= -\overline{q}'\alpha_{F2}w_2-(1+\alpha_{F2})c \\
u_2(H,l,S) &= (1+\alpha_{S2}-q''\alpha_{S2})w_2+\alpha_{S2}c \\
u_2(H,l,F) &= -q''\alpha_{F2}w_2+\alpha_{F2}c \\
u_2(L,h,S) &= (1+\alpha_{S2})w_2-(1+\alpha_{S2})c \\
u_2(L,h,F) &= -(1+\alpha_{F2})c \\
u_2(L,l,S) &= (1+\alpha_{S2}-q'\alpha_{S2})w_2+\alpha_{S2}c \\
u_2(L,l,F) &= -q'\alpha_{F2}w_2+\alpha_{F2}c
\end{aligned}
$$

(7) 式を用いてプレーヤー１の期待効用を計算し整理すると

$$
\begin{aligned}
U_2(H,h) &= \{q''(1+\alpha_{S2}-\overline{q}'\alpha_{S2})-(1-q'')\overline{q}'\alpha_{F2}\}w_2 \\
&\quad -\{q''(1+\alpha_{S2})+(1-q'')(1+\alpha_{F2})\}c \\
U_2(L,h) &= \{q'(1+\alpha_{S2})\}w_1-\{q'(1+\alpha_{S2})+(1-q')(1+\alpha_{F2})\}c \\
U_2(H,l) &= \{\overline{q}'(1+\alpha_{S2}-q''\alpha_{S2})-(1-\overline{q}')q''\alpha_{F2}\}w_2+\{\overline{q}'\alpha_{S2}+(1-\overline{q}')\alpha_{F2}\}c \\
U_2(L,l) &= -q'\alpha_{S2}w_2+\alpha_{F2}c
\end{aligned}
$$

となる．これらよりプレーヤー２の最適応答関数を求めると

$$
BR_2(H)=\begin{cases} h & w_2 > \frac{(q''+\overline{q}')(\alpha_{S2}-\alpha_{F2})+2\alpha_{F2}+1}{(q''-\overline{q}')(1+\alpha_{S2}+\alpha_{F2})}c \\ l & w_2 < \frac{(q''+\overline{q}')(\alpha_{S2}-\alpha_{F2})+2\alpha_{F2}+1}{(q''-\overline{q}')(1+\alpha_{S2}+\alpha_{F2})}c \end{cases} \tag{30}
$$

$$BR_2(L) = \begin{cases} h & w_2 > \frac{q'(\alpha_{S2}-\alpha_{F2})+2\alpha_{F2}+1}{q'(1+\alpha_{S2}+\alpha_{F2})}c \\ l & w_2 < \frac{q'(\alpha_{S2}-\alpha_{F2})+2\alpha_{F2}+1}{q'(1+\alpha_{S2}+\alpha_{F2})}c \end{cases} \tag{31}$$

となる．これらの分岐点をそれぞれ

$$\overline{X}_2 = \frac{(q'' + \overline{q}')(\alpha_{S2} - \alpha_{F2}) + 2\alpha_{F2} + 1}{(q'' - \overline{q}')(1 + \alpha_{S2} + \alpha_{F2})}c$$
$$\overline{Y}_2 = \frac{q'(\alpha_{S2} - \alpha_{F2}) + 2\alpha_{F2} + 1}{q'(1 + \alpha_{S2} + \alpha_{F2})}c$$

としておく．

さて、プレーヤーが非対称である場合もこれらの分岐点の大小関係が問題となってくる．プレーヤーが対称な場合と同様の表を書くと以下のようになる．

$(a')\overline{X}_1 < \overline{Y}_1$ かつ $\overline{X}_2 < \overline{Y}_2$ の場合

$\overline{Y}_1 < w_1$	(H,l)	(H,h)	(H,h)
$\overline{X}_1 < w_1 < \overline{Y}_1$	(L,l)	(H,h)、(L,l)	(H,h)
$w_1 < \overline{X}_1$	(L,l)	(L,l)	(L,h)
1／2	$w_2 < \overline{X}_2$	$\overline{X}_2 < w_2 < \overline{Y}_2$	$\overline{Y}_2 < w_2$

$(b')\overline{X}_1 > \overline{Y}_1$ かつ $\overline{X}_2 > \overline{Y}_2$ の場合

$\overline{X}_1 < w_1$	(H,l)	(H,l)	(H,h)
$\overline{Y}_1 < w_1 < \overline{X}_1$	(H,l)	(H,l)、(L,h)	(L,h)
$w_1 < \overline{Y}_1$	(L,l)	(L,h)	(L,h)
1／2	$w_2 < \overline{Y}_2$	$\overline{Y}_2 < w_2 < \overline{X}_2$	$\overline{X}_2 < w_2$

$(c')\overline{X}_1 < \overline{Y}_1$ かつ $\overline{X}_2 > \overline{Y}_2$ の場合

$\overline{Y}_1 < w_1$	(H,l)	(H,l)	(H,h)
$\overline{X}_1 < w_1 < \overline{Y}_1$	(L,l)	$\times$	(H,h)
$w_1 < \overline{X}_1$	(L,l)	(L,h)	(L,h)
1／2	$w_2 < \overline{Y}_2$	$\overline{Y}_2 < w_2 < \overline{X}_2$	$\overline{X}_2 < w_2$

$(d')\overline{X}_1 > \overline{Y}_1$ かつ $\overline{X}_2 < \overline{Y}_2$ の場合

$\overline{X}_1 < w_1$	(H,l)	(H,h)	(H,h)
$\overline{Y}_1 < w_1 < \overline{X}_1$	(H,l)	$\times$	(L,h)
$w_1 < \overline{Y}_1$	(L,l)	(L,l)	(L,h)
1／2	$w_2 < \overline{X}_2$	$\overline{X}_2 < w_2 < \overline{Y}_2$	$\overline{Y}_2 < w_2$

なお、仮定 2.2. と 2.3. は以下の分析にも仮定されているものとする.

3.3 企業の最適行動

さて、プレーヤーが非対称な場合も、企業は期待利潤を最大化するような報酬を設定することに変わりない. (6) 式と上の $(a')(b')(c')(d')$ の表を用いて報酬に関して最大となる期待利潤を書き出してみると、全ての場合において

$$\max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) = q''\{\pi - (\overline{X}_1 + \overline{X}_2)\}$$
$$\max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) = \overline{q}'(\pi - \overline{Y}_1)$$
$$\max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) = q'(\pi - \overline{Y}_2)$$
$$\max_{w_1,w_2} \Pi(L,l) = 0$$

となる. プレーヤーが対称な場合と同様に、これらを α に関して最大化するために、$\overline{X}_1$、$\overline{X}_2$、$\overline{Y}_1$、$\overline{Y}_2$ の最小化問題を考えておく.

$\overline{X}_1$ の最小化問題

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha_{S1},\alpha_{F1}} \quad & \overline{X}_1 \\
s.t. \quad & \alpha_{S1} \geq 0 \\
& \alpha_{F1} \geq 0 \\
& 1-\alpha_{S1} \geq 0 \\
& 1-\alpha_{F1} \geq 0
\end{aligned}$$

今 $\overline{X}_1$ の最小化問題と X_1 の最小化問題には本質的な違いがないので、２章の結果を用いることができる．よって、この問題の解は

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1}) = (0,1) \quad if \quad q''+q' > 1 \tag{32}$$
$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1}) = (1,0) \quad if \quad q''+q' < 1 \tag{33}$$

である．さらにこの時報酬 w_1 は、以上の解を X_1 に代入して

$$w_1 = \frac{3-(q''+q')}{2(q''-q')}c \quad if \quad q''+q' > 1 \tag{34}$$
$$w_1 = \frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c \quad if \quad q''+q' < 1 \tag{35}$$

となる．

$\overline{X}_2$ の最小化問題

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha_{S2},\alpha_{F2}} \quad & \overline{X}_2 \\
s.t. \quad & \alpha_{S2} \geq 0 \\
& \alpha_{F2} \geq 0 \\
& 1-\alpha_{S2} \geq 0 \\
& 1-\alpha_{F2} \geq 0
\end{aligned}$$

これも同様に解くと解は

$$(\alpha_{S2},\alpha_{F2}) = (0,1) \quad if \quad q''+\overline{q}' > 1 \tag{36}$$
$$(\alpha_{S2},\alpha_{F2}) = (1,0) \quad if \quad q''+\overline{q}' < 1 \tag{37}$$

となる．さらに報酬 w_2 は

$$w_2 = \frac{3-(q''+\overline{q}')}{2(q''-\overline{q}')}c \quad if \quad q''+\overline{q}' > 1 \tag{38}$$

$$w_2 = \frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c \quad if \quad q''+\overline{q}' < 1 \tag{39}$$

となる．

$\overline{Y}_1$ の最小化問題

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_{S1},\alpha_{Fi1}} \ & \overline{Y}_1 \\ s.t. \quad \alpha_{S1} &\geq 0 \\ \alpha_{F1} &\geq 0 \\ 1-\alpha_{S1} &\geq 0 \\ 1-\alpha_{F1} &\geq 0 \end{aligned}$$

この問題も Y_1 の最小化問題と同じなので、これを解くと

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1}) = (1,0) \tag{40}$$

となる．さらにこの時報酬 w_1 は

$$w_1 = \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c \tag{41}$$

となる．

$\overline{Y}_2$ の最小化問題

$$\begin{aligned} \min_{\alpha_{S2},\alpha_{F2}} \ & \overline{Y}_2 \\ s.t. \quad \alpha_{S2} &\geq 0 \\ \alpha_{F2} &\geq 0 \\ 1-\alpha_{S2} &\geq 0 \\ 1-\alpha_{F2} &\geq 0 \end{aligned}$$

これも同様に解くと

$$(\alpha_{S2},\alpha_{F2}) = (1,0) \tag{42}$$

となる．さらにこの時報酬 w_2 は

$$w_2 = \frac{q'+1}{2q'}c \tag{43}$$

となる．

以上の結果より、企業の期待利潤の最大値を求めていく．起こりうる状況は以下の３つの場合である．

$$\begin{gathered} q''+q'>1 \text{ かつ } q''+\overline{q}'>1 \\ q''+q'<1 \text{ かつ } q''+\overline{q}'>1 \\ q''+q'<1 \text{ かつ } q''+\overline{q}'<1 \end{gathered}$$

もちろん $q''+q'>1$ かつ $q''+\overline{q}'<1$ は仮定 3.1. に反しているので考えない．さて、報酬の最小値をそれぞれの期待利得に代入すると以下のようになる．なお、プレーヤーが対称な場合同様 (L,l) が最適になることはないので考えない．

$q''+q'>1$ かつ $q''+\overline{q}'>1$ の場合

$$\begin{aligned} \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) &= q''\left(\pi - \frac{3-q''-q'}{2(q''-q')}c - \frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right) \\ \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) &= \overline{q}'\left(\pi - \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right) \\ \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) &= q'\left(\pi - \frac{q'+1}{2q'}c\right) \end{aligned}$$

$q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'>1$ の場合

$$\begin{aligned} \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,h) &= q''\left(\pi - \frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c - \frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right) \\ \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(H,l) &= \overline{q}'\left(\pi - \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right) \\ \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}} \max_{w_1,w_2} \Pi(L,h) &= q'\left(\pi - \frac{q'+1}{2q'}c\right) \end{aligned}$$

$q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'<1$ の場合

$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(H,h)=q''\left(\pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c\right)$$
$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(H,l)=\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$$
$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(L,h)=q'\left(\pi-\frac{q'+1}{2q'}c\right)$$

以上のそれぞれの場合で、どの行動の組が企業にとって最適かを考えるが、その前に、プレーヤーが対称な場合と同様に、これらの期待利潤が正となるよう以下の仮定をおく.

仮定 3.2. プレーヤーが非対称である時、π,c,q'',$\overline{q}'$,q' について

$$\pi-\frac{3-q''-q'}{2(q''-q')}c-\frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c>0 \text{ かつ } \pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c>0$$

$$\text{かつ } \pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c>0 \text{ かつ } \pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c>0 \text{ かつ } \pi-\frac{q'+1}{2q'}c>0$$

が成り立っているとする.

これによって (L,l) 以外の期待利潤は正であるから、これらの大小関係をもとに企業の最適な行動組を求めればよい.

さて、実際にそれを求めていくが、仮定 3.2. を仮定したことにより $\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(H,l) > \max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(L,h)$ が常に成り立つことが証明できる.

証明. $\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(H,l)>\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(L,h)$ を示す. まずそれらの差を取ると

$$\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(H,l)-\max_{\alpha_{Si},\alpha_{Fi}}\max_{w_1,w_2}\Pi(L,h)$$
$$=\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)-q'\left(\pi-\frac{q'+1}{2q'}c\right)$$
$$=(\overline{q}'-q')\pi-\frac{1}{2}(\overline{q}'-q')c$$

$$= (\overline{q}' - q')\left(\pi - \frac{1}{2}c\right)$$

ところで、仮定 3.2. より $\pi - \frac{1}{2}c > 0$ が言えるので

$$(\overline{q}' - q')\left(\pi - \frac{1}{2}c\right) > 0$$

となり題意が示された. □

これによって企業が達成すべき行動の組は (H, h) か (H, l) のどちらかである. プレーヤーが対称な場合には、(H, h) が最適な場合、(H, l) が最適な場合に関する考察を行ったが、プレーヤーが非対称な場合には、パラメーターも 1 つ増え条件式は非常に複雑なものになっている. よって、この条件式の考察はこの章では避け、企業の選ぶべき人の性格と報酬に関する考察に絞って議論することにする. まず、以下に結果をまとめておく.

$q'' + q' > 1$ かつ $q'' + \overline{q}' > 1$ における企業の最適行動

結果 3.1. プレーヤーが非対称でありかつ $q'' + q' > 1$ かつ $q'' + \overline{q}' > 1$ が満たされる時、企業にとって最適なプレーヤーの性格と報酬は
$q''\left(\pi - \frac{3-q''-q'}{2(q''-q')}c - \frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right) > \overline{q}'\left(\pi - \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H, h) を達成し

$$(\alpha_{S1}, \alpha_{F1}) = (\alpha_{S2}, \alpha_{F2}) = (0, 1)$$
$$w_1 = \frac{3-(q''+q')}{2(q''-q')}c \text{ 、} w_2 = \frac{3-(q''+\overline{q}')}{2(q''-\overline{q}')}c$$

となり、$q''\left(\pi - \frac{3-q''-q'}{2(q''-q')}c - \frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right) < \overline{q}'\left(\pi - \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H, l) を達成し

$$(\alpha_{S1}, \alpha_{F1}) = (1, 0)\text{、}(\alpha_{S2}, \alpha_{F2}) = [0, 1]^2\text{内の任意の組}$$
$$w_1 = \frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\text{、}w_2 = 0$$

となる.

$q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'>1$ における企業の最適行動

結果 3.2. プレーヤーが非対称でありかつ $q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'>1$ が満たされる時、企業にとって最適なプレーヤーの性格と報酬は
$q''\left(\pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right)>\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H,h) を達成し

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1})=(1,0)、(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=(0,1)$$
$$w_1=\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c、w_2=\frac{3-(q''+\overline{q}')}{2(q''-\overline{q}')}c$$

となり、$q''\left(\pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{3-q''-\overline{q}'}{2(q''-\overline{q}')}c\right)<\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H,l) を達成し

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1})=(1,0)、(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=[0,1]^2\text{内の任意の組}$$
$$w_1=\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c、w_2=0$$

となる.

$q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'<1$ における企業の最適行動

結果 3.3. プレーヤーが非対称でありかつ $q''+q'<1$ かつ $q''+\overline{q}'>1$ が満たされる時、企業にとって最適なプレーヤーの性格と報酬は
$q''\left(\pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c\right)>\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H,h) を達成し

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1})=(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=(1,0)$$
$$w_1=\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c\ 、w_2=\frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c$$

となり、$q''\left(\pi-\frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c-\frac{q''+\overline{q}'+1}{2(q''-\overline{q}')}c\right)<\overline{q}'\left(\pi-\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c\right)$ の場合、行動組 (H,l) を達成し

$$(\alpha_{S1},\alpha_{F1})=(1,0)、(\alpha_{S2},\alpha_{F2})=[0,1]^2\text{内の任意の組}$$
$$w_1=\frac{\overline{q}'+1}{2\overline{q}'}c、w_2=0$$

となる.

3.4　考察

では結果の考察を行っていくが、(H, l) が最適な場合の結果はプレーヤーが対称な場合と同じである．よって、(H, h) が最適である場合の結果を見ていく．

まず結果 3.1. の考察である．場合分けに出てくる $q'' + q'$ は確率の定義に戻ると、２人とも頑張った時の成功確率と能力の劣るプレーヤーのみが頑張った場合の成功確率の和である．また $q'' + \overline{q}'$ は、２人も頑張った時の成功確率と能力の優るプレーヤーのみが頑張った場合の成功確率の和である．これらが今ともに 1 を超えているが、これを広い意味で解釈すると、簡単なプロジェクトでかつ、プレーヤー同士の能力の差は比較的小さいということである．さらに、この場合の企業が選ぶべき性格は、プレーヤーが対称な場合と同じである．つまりここから分かることは、プレーヤーの能力に差があっても、その差が小さければ、プレーヤーが対称の場合と同様に、同じ性格の２人を選べばいいということである．結果 3.3. についても同じことが言える．この場合の解釈は、難しいプロジェクトでかつ、プレーヤー同士の能力の差は比較的小さいということである．プロジェクトの難易度が変わっても、プレーヤー同士の能力の差が小さければ、対称な場合と同様、同じ性格を持った２人を選べばいいことが分かる．

では結果 3.2. からは何が分かるだろうか．この場合 $q'' + q'$ は 1 を超えないが、$q'' + \overline{q}'$ は 1 を超えていることから、２人の能力の差が比較的大きいことを意味している．この場合、能力の優る人は成功に敏感で失敗に動じない人がよく、能力の劣る人は成功に動じず失敗に敏感である人がよいという結果である．今能力の優る人の立場で、仮に頑張るを選んで成功したとする．この場合、自分が頑張らないを選んでいたら、２人の能力に差大きい分、成功の確率は大きく下がるので、頑張ったことへの「満足感」が大きいと考えられる．つまり成功に敏感であればあるだけいいということである．一方、仮に頑張るを選んで失敗すると、頑張らなければ良かったという「後悔」があるが、これを感じない人が望ましい．チームの仲間の能力が低くても、失敗にとらわれず成功を意識してやっていける人がいいというイメージであり、これは直感に合う．まさに最適なチームのリーダーをこのモデルでは描写しているように見える．また、能力の劣る人の立場に立つと、頑張って成功した時、相手は自分よりも

能力が高いので頑張らなくても良かったという「後悔」があるかもしれないので、成功に敏感でないほうが望ましい．また、頑張らずに失敗すると、相手は能力も高いので自分が頑張ることで成功していたかもしれないというような「後悔」を感じられる人が好ましい．しっかりできる人についていこうとする部下のような存在を描写したモデルになっている．ここまでの考察をまとめておく．

考察 3.1. プレーヤーが非対称な場合に企業がチームに選ぶべき 2 人は
行動組 (H, h) が最適な場合
　プレーヤーの能力の差が小さければ、選ぶ人間は対称の場合と同じである．
　プレーヤーの能力の差が大きいと

能力の高い人：成功に敏感で失敗に動じない人

能力の低い人：成功に動じず失敗に敏感な人

を選べばよい．これは最適なリーダーと部下の関係とも捉えられる．
行動組 (H, l) が最適な場合
　プレーヤーが対称な場合と同じである．

次に報酬に関する考察を行う．まず $(H.l)$ が最適な場合は $\overline{q}'$ が大きいほどプレーヤー 1 の報酬が下がることが分かり、これはプレーヤーが対称な場合と同じである．

(H, h) が最適な場合を見てみる．まず結果 3.1. であるが、性格は同じでも報酬は異なっているように見える．ここで $w_1 = \frac{3-q''-q'}{2(q''-q')}c$ を q' で偏微分すると

$$\frac{\partial w_1}{\partial q'} = \frac{3-2q''}{2(q''-q')^2}c > 0$$

つまり q' が大きいほど報酬は大きくなる．今 $\overline{q}' > q'$ であるから、$w_1 < w_2$ が常に成り立つことが分かる．これは、簡単な仕事には能力の高い人の報酬よりも能力の低い人の報酬を高めたほうがいいということを意味する．また結果 3.3. についても同様に $w_1 = \frac{q''+q'+1}{2(q''-q')}c$ を q' に関して偏微分すると

$$\frac{\partial w_1}{\partial q'} = \frac{2q''+1}{2(q''-q')^2}c > 0$$

となり、q' が大きいほど報酬は大きくなる．つまり、この場合にも $w_1 < w_2$ が成り立っている．よって難しい仕事にも、能力の高い人の報酬よりも能力の低い人の報酬

を高めたほうがいいことになる．最後に結果 3.2. であるが、先ほどの微分の計算と報酬を見てみると、q' と $\overline{q}'$ の差が大きいほどプレーヤー２の報酬は高まり、プレーヤー１の報酬は小さくなっていくことが分かる．つまり能力に差があるほど、できる人には少ない報酬を与え、できない人には高い報酬を与えるという現実のイメージと正反対な結果が出ている．これはなぜだろうか．ここで期待効用 $U_1(L,h)$ を見てみると

$$U_1(L,h) = \{q'(1+\alpha_{S1} - q''\alpha_{S1}) - (1-q')q''\alpha_{F1}\}w_1 + \{q'\alpha_{S1} + (1-q')\alpha_{F1}\}c$$

であるが、プレーヤー１にとって自分が頑張らない時の期待効用は、相手が１人で頑張る時の成功確率が高いほど大きくなる．つまり「頑張る」を選択してほしい企業にとっては $U_1(L,h)$ が高まってしまうと嬉しくないわけである．そのため企業は報酬を操作して「頑張る」を選択させようとするのである．そこで $U_1(H,h)$ もみてみると

$$U_1(H,h) = \{q''(1+\alpha_{S1}-q'\alpha_{S1})-(1-q'')q'\alpha_{F1}\}w_1-\{q''(1+\alpha_{S1})+(1-q'')(1+\alpha_{F1})\}c$$

であるが、今それぞれの報酬の限界効用を比べてみると

$$\frac{\partial U_1(H,h)}{\partial w_1} - \frac{\partial U_1(L,h)}{\partial w_1}$$

$$= (q''(1+\alpha_{S1} - q'\alpha_{S1}) - (1-q'')q'\alpha_{F1}) - (q'(1+\alpha_{S1} - q''\alpha_{S1}) - (1-q')q''\alpha_{F1})$$

$$= (q'' - q')(1+\alpha_{S1}+\alpha_{F1}) > 0$$

であり、「頑張る」を選択した場合の限界効用のほうが大きい．つまり企業は報酬をあげることで「頑張る」を引き出そうとしているのである．これはプレーヤー２にも同じことが言えるのだが、プレーヤー２は q' よりも値の大きい $\overline{q}'$ が期待効用の中に入っているため、「頑張る」をキープするにはプレーヤー１よりも高い報酬が必要になる．プレーヤー２のほうが報酬が高く、また q' と $\overline{q}'$ の差が大きいほど報酬の差も大きいのはこのためである．これは改善しなければならない問題の一つである．

終章

この章では本文のまとめ、そして問題点、課題等について述べる．まずまとめであるが、本稿では企業にとって、どんな性格を持ち合わせた人をチームとして働かせることが最適なのかを中心に議論してきた．まず初めに分析を行ったのは、プレーヤーが対称な場合である．プレーヤーが対称であるとは、各プレーヤーの成功への貢献度は同じであるという定義であった．この場合に、２人とも頑張らせることが最適であれば、選ぶべき人は、難しい仕事ならば「失敗に動じず成功に敏感な２人」であり、簡単な仕事には「成功に動じず失敗に敏感な２人」である．仕事が難しいと成功への「満足度」を感じられる人を選ぶべきであり、簡単な仕事だと、失敗した時の「後悔」を感じられる人が最適だということである．我々の直感にも合う結果が出たといえる．次にプレーヤーが非対称な場合の分析を行った．プレーヤーが非対称であるとは、各プレーヤーの成功への貢献度が同じでないことを意味していた．つまり、能力に差があるということである．しかし、難しい仕事であれ簡単な仕事であれ、能力の差が小さい場合には、選ぶべき人はプレーヤーが対称である場合と同じであることが分かった．つまり違いが出てくるのは、能力の差が大きい場合である．その場合に選ぶべき人は、能力の高い人は「成功に敏感で失敗に動じない人」であり、能力の低い人には「成功に動じず失敗に敏感な人」である．能力の高い人には、相手の能力が低いがゆえの失敗などに動じず、成功した時の喜びが大きい人がよく、リーダーとして選ぶべき性格としても捉えられるだろう．能力の低い人は、仮に頑張らずに失敗した時、相手の能力が高いので自分が頑張ることで成功していたかもしれないというような「後悔」を感じられる人が好ましく、リーダーについていこうとする最適な部下としても捉えることができるだろう．以上が主要な結果のまとめである．全体的に、現実のイメージと一致している結果を得ることができ、起こりうる現状を少しでも描写できるモデルを作ることができたように思える．

では次に本稿の問題点について言及しておく．まず１つめは、プレーヤーの行動が「頑張る」か「頑張らない」の２つしかないということである．現実には頑張りを調整しながら最適な頑張り度合いを決定し、仕事に取り組んでいると考えられる．ただ、本稿で定義した効用関数においては、無限個の選択肢を扱うことができない．今選ん

でいる選択肢に対して、別の選択肢が無限個あることになるので、そのうちのどれを選べばいいかが難しい問題である．

２つめに、ゲームは静学的な分析に終始してしまったが、現実の世界では時間の流れの中で、仕事への頑張りや態度は変わっていくと考えられる．特に本稿の例でいうと、仮に別の選択肢を選択しておけば良かったという「後悔」を経験すれば、その次の仕事の際には少なからず態度が変わってくるはずである．動学的なゲームへの拡張が課題である．

３つめに、企業にとってどの行動組を達成するのが最適なのかを示す条件式は導出できたものの、具体的にそれがどういったインプリケーションを含んでいるのかを示すことができていない．ここを明らかにすることで、より具体的な戦略を企業に提示することができるだろう．

４つめに、最後に出てきた報酬の問題である．一般的に、能力の高いプレーヤーよりも能力の低いプレーヤーの報酬のほうが高いという結論は現実に合わない．少なくとも能力の高いプレーヤーのインセンティブの問題が発生するだろうし、より高い生産性を生み出すプレーヤーへの報酬を高めるのが自然である．プレーヤーの効用関数の形に立ち返って分析し直す必要があるだろう．

そして最後に、企業にとって、どのような α を選べばいいかが分かっても、実際にその値をどのように知ればいいのかは１つの問題として出てくる．現実に、人は自分の真の性格を表明することは少ないし、むしろプレーヤーが戦略的に虚偽の性格を表明し続ける可能性もある．よって企業が性格を読み取る指標となるものを作ること、そしてプレーヤーに真の性格を表明させるメカニズムを設計することが課題となる．

謝辞

本稿を執筆するにあたって、また筆者が経済学を学ぶにあたって本当にたくさんの方々に支援をしていただいた．３年時に初めてゼミに所属し、経済学を含め様々な面で自分の未熟さを知った一方で、当時の指導教官である入谷純教授は基礎から手厚く指導してくださり、経済学を研究するスタート地点に筆者を立たせてくださった．また、日々参加させていただいている勉強会のメンバーである、多鹿智哉さん、数村友也さん、直井雅一君、山縣昂平君には日々の研究はもちろん、本稿を執筆する際にも数多くの助言や励ましの言葉をいただいた．さらに、同回生のように接してくれたゼミの３回生の皆さんには、本稿への助言はもちろん、とにかく楽しいゼミの活動を共に過ごしてくださった．そして、経済学だけでなく様々な面で刺激を与えてくれ、良きライバル、そして友として共に歩んでくれた同じ４回生の山野翔太君、伊藤優君は筆者にとってとても大きな存在であった．そして最後に、筆者を含めた４回生の無理な要望にも全て１つ１つ応えてくださり、経済学やゲーム理論の考え方や知識はもちろん、筆者の研究への態度やモチベーションを大きく変えてくださった指導教官の宮川栄一教授の存在ははかり知れない．この場を借りて感謝の意を申し上げたい．

参考文献

日本語の文献

a) 著書

岡田章 (2011)『ゲーム理論』有斐閣

b) 資料

末廣英生 (2012)『ゲーム理論講義ノート』神戸大学経営学部

外国語の文献

a) 著書

O.L. Mangasarian(1987)*Nonlinear Programming*, Classics in Applied Mathematics, Society for Industrial and Applied Mathematics.

John C. Harsanyi and Reinhard Selten(1988)*A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, Vol. 1 of MIT Press Books, The MIT Press.

b) 雑誌論文

Faruk Gul and Wolfgang Pesendorfer(2001) "Temptation and Self-control," *Econometrica*, Vol. 69, No. 6, pp. 1403-1435.