2009.07.28

(上級) 経済数学:第５章 (１回目) 試験解答

問題１.

問題文訂正「$f : \underline{\mathbb{R}^2_{++}} \to \mathbb{R}$」

(1)　$\forall x^1, x^2 \in \mathbb{R}^2_+,\ \forall t \in [0,1],\ f(tx^1 + (1-t)x^2) \geqq tf(x^1) + (1-t)f(x^2)$

(解説) $\mathbb{R}^2_+$ 上で定義された実数値関数 f が凹関数であることの定義を書きなさいというのが問いです．$\mathbb{R}^2_+$ は凸集合なので，解答のようになります．

(2)　$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++},\ \forall h_1 \in \mathbb{R}, h_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) &= h_1^2 \alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} + 2h_1h_2\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} + h_2^2 x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} \\ &= h_2^2 x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}(\alpha(\alpha-1)\frac{h_1^2}{h_2^2}\frac{x_2^2}{x_1^2} + 2\frac{h_1}{h_2}\alpha\beta\frac{x_2}{x_1} + \beta(\beta-1)) \\ &= h_2^2 x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2}(\alpha(\alpha-1)(\frac{h_1x_2}{h_2x_1})^2 + 2\alpha\beta(\frac{h_1x_2}{h_2x_1}) + \beta(\beta-1))\end{aligned}$$

$\alpha(\alpha-1)(\frac{h_1x_2}{h_2x_1})^2 + 2\alpha\beta(\frac{h_1x_2}{h_2x_1}) + \beta(\beta-1)$ の判別式[*1]

$$\begin{aligned}(\alpha\beta)^2 - \alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1) &= \alpha\beta(1-(\alpha-1)(\beta-1)) \\ &= \alpha\beta(\alpha+\beta-1) \leqq 0\end{aligned}$$

より $\alpha(\alpha-1)(\frac{h_1x_2}{h_2x_1})^2 + 2\alpha\beta(\frac{h_1x_2}{h_2x_1}) + \beta(\beta-1) \leqq 0$．よって $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) \leqq 0$.

また，$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++},\ \forall h_1 \in \mathbb{R}, h_2 = 0$ のとき，

$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) = h_1^2\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} + 2h_1h_2\alpha\beta x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta-1} + h_2^2 x_1^{\alpha}x_2^{\beta-2} = h_1^2\alpha(\alpha-1)x_1^{\alpha-2}x_2^{\beta} \leqq 0$.

よって，

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, x_2) \leqq 0,\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2_{++},\ \forall h \in \mathbb{R}^2.$$

したがって，$f(x_1, x_2)$ は凹関数である．

(3)　一般に，その関数が凹関数の単調 (増加) 変換で表すことができれば準凹関数である．

$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が単調増加関数であるとは $\forall x, y \in \mathbb{R}, x > y \to g(x) > (y)$ が成り立つことである．$f(x) = g(h(x))$ とす

[*1] 四章練習問題解答 5 参照

ると，f を h の g による単調増加変換であるという．

単調増加関数 $g:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}$ を $g(z)\overset{\mathrm{def}}{=}z^{\alpha+\beta}$ とすると，

$$f(x,y)=x^{\alpha}y^{\beta}=(x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}y^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}})^{\alpha+\beta}=g(h(x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}},y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}})) \tag{1}$$

とできる．ただし $h(x,y)\overset{\mathrm{def}}{=}x^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}y^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}$．$h$ は $\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\beta}{\alpha+\beta}=1$ より，(2) の結果から，凹関数である．f が準凹関数であることを示す．

$\forall x=(x_1,x_2),y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2_+,\ \forall t\in[0,1],$

$z(t)\overset{\mathrm{def}}{=}tx+(1-t)y=(tx_1+(1-t)y_1,tx_2+(1-t)y_2)\in\mathbb{R}^2_+$

ここで $h(x)\geqq h(y)$ としても一般性を失わない (実数を比べると必ずどっちかが大きいか等しい).

$$f(z(t))=g(h(z(t)))\geqq g(h(y))=\min\{g(h(x)),g(h(y))\}=\min\{f(x),f(y)\}$$

不等号は $h(x)\geqq h(y)\Leftrightarrow th(x)+h(y)\geqq th(y)+h(y)\Leftrightarrow th(x)+(1-t)h(y)\geqq h(y)$ より，h の凹性を考慮すれば $h(z(t))\geqq th(x)+(1-t)h(y)\geqq h(y)$ であることと，g の単調増加性より従う．

問題 2．(ねらい) 半期の授業は問題 2，とりわけ (1)〜(4) を念頭に置いてきました．これらの問題がすらすら解ければこの授業は卒業といえるでしょう．

(1)　効用関数 $u:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+,\ \ u(x_1,x_2)=(\alpha x_1)^{\beta}(x_2)^{\gamma},\ \alpha,\beta,\gamma>0,\beta+\gamma\leqq 1$ は $\mathbb{R}^2_+$ 上で連続である．

確認）明らかなので略.

$\forall p\gg 0,\ I\geqq 0$ について，予算集合 $B(p,I)\overset{\mathrm{def}}{=}\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+\mid p_1x_1+p_2x_2\leqq I\}$ は非空コンパクト集合である．

確認）$\forall p\gg 0,\ I>0$ とする．

$(0,0)\in B(p,w)$ より非空.

次に，$(0,0)$ にたいして，明らかに $\forall x\in B(p,w)$，$(0,0)\leqq x$ かつ，$(\frac{I}{p_1},\frac{I}{p_2})$ にたいして，$\forall x\in B(p,w)$，$x\leqq(\frac{I}{p_1},\frac{I}{p_2})$ なので有界.

さらに，内積 $(p_1,p_2)\cdot(x_1,x_2)\overset{\mathrm{def}}{=}p_1x_1+p_2x_2$ は連続関数である (連続関数同士の掛け算，足し算は連続なので)．これを $F:(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+\mapsto(p_1x_1+p_2x_2)\in\mathbb{R}$ とすると，$B(p,I)=\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+\mid p_1x_1+p_2x_2\leqq I\}$ は閉集合 $[0,I]$ の F による逆像 $F^{-1}([0,I])\overset{\mathrm{def}}{=}\{(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2_+\mid F(z_1,z_2)\in[0,I]\}$ となるので，$B(p,I)$ も閉集合である*2.

よってワイエルシュトラウスの定理より，効用最大化問題の解は存在する．

(解説) 4 章試験 (2 回目) の問題 1 と関連しています．ワイエルシュトラウスの定理は効用最大化問題に解があるのか

*2 $F:X\to Y$ が連続関数，$C\subset Y$ を任意の (Y における) 閉集合とすると，$F^{-1}(C)$ は (X における) 閉集合となる．これは連続関数の有名な特徴のひとつです．例えば，入谷 純・久我 清 (1999)『数理経済学入門』の 118 ページ定理 5.7 を参照してください．

という問題に対する解答を与えてくれます．ワイエルシュトラウスの定理は，C を $\mathbb{R}^2$ の非空コンパクト集合とすると，C 上で定義された実数値連続関数 f はある $\bar{x} \in C$ において最大値を達成するというものです．まず，定理の前提部分が満たされるか，つまり予算集合が非空コンパクト集合であること，効用関数が連続であることをチェックしましょう．

(2)　定義域 $\mathbb{R}^2_+$ の境界とは $\partial\mathbb{R}^2_+ \overset{\text{def}}{=} cl\mathbb{R}^2_+ \backslash Int\mathbb{R}^2_+ = \mathbb{R}^2_+ \backslash \mathbb{R}^2_{++} = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+ \mid z_1 = 0 \vee z_2 = 0\}$ である[*3]．よって，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \in \partial\mathbb{R}^2_+$ とすると，$u(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = 0$ である．一方 $p \gg 0,\ I > 0$ を考慮すれば，$\exists(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in B(p, I),\ \tilde{x}_1, \tilde{x}_2 > 0$ であり，$u(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) > 0$ である．0 よりも高い効用を与える消費は常に予算内に存在するので境界上の消費が効用最大化解にはなり得ない．

(3)　ラグランジュ関数 $L(x_1, x_2, \lambda) \overset{\text{def}}{=} u(x_1, x_2) + \lambda(I - p_1x_1 - p_2x_2)$ とすると，ラグランジュの必要条件は

$$\begin{cases} L_1 = \frac{\partial L}{\partial x_1} = \beta(\alpha x_1)^{\beta-1}\alpha(x_2)^{\gamma} - \lambda p_1 = 0 \\ L_2 = \frac{\partial L}{\partial x_2} = (\alpha x_1)^{\beta}\gamma(x_2)^{\gamma-1} - \lambda p_2 = 0 \\ L_\lambda = \frac{\partial L}{\partial \lambda} = I - p_1x_2 - p_2x_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$

これを解いて，$(x_1^*, x_2^*) = \left(\dfrac{\beta I}{(\beta+\gamma)p_1}, \dfrac{\gamma I}{(\beta+\gamma)p_2}\right) \in \mathbb{R}^2_{++}$.

(解説) 計算ミスをしている解答が目立ちました．

(4)　$\alpha, \beta, \gamma > 0, \beta + \gamma \leqq 1$ を考慮すると，

$u_{11} = \alpha^2\beta(\beta-1)(\alpha x_1)^{\beta-2}(x_2)^{\gamma} \leqq 0,$

$u_{22} = \gamma(\gamma-1)(\alpha x_1)^{\beta}(x_2)^{\gamma-2} \leqq 0,$

$u_{12} = u_{21} = \alpha\beta\gamma(\alpha x_1)^{\beta}(x_2)^{\gamma},$

$u_{11}u_{22} - u_{12}u_{21} = \alpha\beta\gamma(\alpha x_1)^{2\beta-2}(x_2)^{2\gamma-2}(\alpha(\beta-1)(\gamma-1) - \alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma(\alpha x_1)^{2\beta-2}(x_2)^{2\gamma-2}\alpha(1-\beta-\gamma) \geqq 0$

となり，u は凹関数である．よって <u>準凹関数</u> でもある[*4]．

さらに，連立方程式 (1) の解 $\underline{\lambda^* = \frac{1}{p_1}\alpha^{\beta}\beta(x_1^*)^{\beta-1}(x_2^*)^{\gamma} > 0}$ である．よって定理 6.5 より，(3) で求めた (x_1^*, x_2^*) は効用最大化問題 (1) の解である．

[*3] 境界の定義については，例えば，丸山徹 (2002) 『経済数学』の 40 ページの定義を参照してください．clA は集合 A の閉包，$IntB$ は集合 B の内核 (内部) のことです．A を含む最小の閉集合を A の閉包，B に含まれる最大の開集合を B の内核といいます．詳しくは入谷 純・久我 清 (1999) 『数理経済学入門』の 113 ページ定義 5.5 および 208 ページ定義 9.1 を参照してください．

[*4] $u : \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ を凹関数とする．$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2_+$，$\forall t \in [0, 1]$ とする．ここで $u(x_1) \geqq u(x_2)$ としても一般性を失わない．$u(x_1) \geqq u(x_2) \Leftrightarrow tu(x_1) \geqq tu(x_2) \Leftrightarrow tu(x_1) - tu(x_2) + u(x_2) \geqq u(x_2) \Leftrightarrow tu(x_1) + (1-t)u(x_2) \geqq u(x_2) = \min\{u(x_1), u(x_2)\}$ よって，u の凹性より $u(tx_1 + (1-t)x_2) \geqq tu(x_1) + (1-t)u(x_2) \geqq \min\{u(x_1), u(x_2)\}$ となり準凹関数である．

(解説) 効用関数が準凹関数であり，ラグランジュ乗数が正値であれば，ラグランジュの必要条件は効用最大化の十分条件になります (定理 6.5).

(5)

$$\frac{\partial x_i^*}{\partial \alpha} = 0,\ i = 1, 2$$

(6)　α の変化は需要量 (x_1^*, x_2^*) に影響を与えない.

需要関数の形から分かるように，効用関数が $\mu(x_1, x_2) = x_1^\beta x_2^\gamma$ という形をとっているときの需要関数と同じ式になってる．$u(x_1, x_2) = \alpha^\beta x_1^\beta x_2^\gamma = \alpha^\beta v(x_1, x_2)$ であり u は v を α^β 倍するという単調変換になっていて，計算すれば u と v の無差別曲線は等しいことが分かる．需要関数を導出するとき効いてくるのは無差別曲線の傾きなので，β, γ にしか依存しない v という効用関数のときの選好と変わらないのである．このようなことを効用の序数性という.