(上級) 経済数学 第四章練習問題
解答編

竹下享佑[*]，高羅ひとみ[†]

解答 (6 月 22 日)

解答 1

問題 1 のねらい

最大値を求める．

直角を挟む 2 辺の長さの和を $A > 0$ とする．一辺の長さを $x \in (0, A)$ とする．この三角形の面積は $f(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}x(A-x)$ である．
極値を達成する点 (極点) の候補は
$f'(x) = 0$ を解いて $x^* = \frac{1}{2}A$.
この点は $f''(x^*) = -1 < 0$ を満たすので極大値を達成する．
次にこの点は最大値を達成することを示そう．
テーラー展開の定理より，また，3 階以上の導関数は 0 であることを考慮すると，

$$\forall h,\ satisfying\ x+h \in [0, A],\ f(x^*+h) = f(x^*) + hf'(x^*) + \frac{h^2}{2}f''(x^*) + \cdots .$$

であり

$$f'(x^*) = 0, f''(x^*) < 0$$

を考慮すると，

$$f(x^*+h) \leqq f(x^*).$$

よって x^* は最大値を達成する[1]．よって一辺の長さが $\frac{1}{2}A$ となるような三角形 (つまり直角二等辺三角形) が求めるものである．

解答 2

問題 2 のねらい

停留点を求める．

連立方程式

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -4x^3 + 4y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -4y + 4x = 0 \end{cases}$$

を解けばよい．$(1+x)x(1-x) = 0$ より，$x = -1, 0, 1$ よって $(x, y) = (-1, -1), (0, 0), (1, 1)$.
(停留点とは極点の候補のことである．)

[*] *E-mail:* addmailadd-2009ta@yahoo.co.jp
[†] *E-mail:* hitomikoura@hotmail.com

[1] グラフを描けば自明ですのでここまでする必要ないかもしれません．一般に 1 変数の 2 次関数 $ax^2 + bx + c$ は $a < (>) 0$ ならば極大 (小) 値が最大 (小) 値です．

解答 3

問題 3 のねらい

停留点が極点をかどうかを確認する．

停留点は

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3y^2 = 0 \end{cases}$$

を解いて求められる $(x,y) = (0,0)$ である．
この点における $f_{xx} = 0, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{yy} = 0$ なので「極値の 1 階，2 階の必要条件を満たさないからこの点は極点ではない，もしくは 1 階，2 階の十分条件を満たすからこの点は極点である.」ということはできない．そこで，以下のよう考える．
定義より，関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が (x^*, y^*) で極大 (or 極小) 値を達成するとは，$\exists \varepsilon > 0$, $\forall (x,y) \in B_\varepsilon(x^*, y^*)$，$f(x,y) \leqq$ (or $\geqq$)$f(x^*, y^*)$ が成立することである．
$x > 0, y > 0$ のとき $f(x,y) > 0$ であり，$x < 0, y < 0$ のとき $f(x,y) < 0$ である．$(0,0)$ を中心とするどんな半径 $\varepsilon > 0$ の開球 $B_\varepsilon(0,0)$ も必ず $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$(第 1 象限の内部のこと) と $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x < 0, y < 0\}$(第 3 象限の内部のこと) と共通部分を持つ．よって，$f(0,0) = 0$ を考慮すると，$\exists \varepsilon > 0$, $\forall (x,y) \in B_\varepsilon(0,0), f(x,y) \leqq$ (or $\geqq$)$f(0,0)$ とはできない (必ず $f(x_1, y_1) < f(0,0) = 0 < f(x_2, y_2)$ となる $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ が $B_\varepsilon(0,0)$ のなかに存在する)．よって停留点 $(0,0)$ は極大値も極小値も達成しない．

解答 4

問題 4 のねらい

極値を求める．

(極値の判定の手順)
・2 回連続微分可能な 1 変数関数 $f(x)$ の場合．
手順 1)$f' = 0$ となる，極点の候補 (停留点) を見つける．
手順 2-1) その点で

$f'' < 0$ なら極大値,

$f'' > 0$ なら極小値[2].

手順 2-2) その点で $f'' = 0$ のとき，極値かどうかわからない．このときは近傍での関数の値を実際に計算して，その点が極値の定義を満たすかどうか考える．

・2 回連続微分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ の場合．
手順 1)

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases}$$

となる，極点の候補 (停留点) を見つける．
手順 2-1) その点で

[2] 1 変数関数の場合，増減表を書くほうが計算が楽なときもあります．

$f_i < 0,\ i = x, y$ かつ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$ なら極大値,

$f_i > 0,\ i = x, y$ かつ $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$ なら極小値.

手順 2-2) その点で $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 0$ なら極値かどうか分からない．このときは問題 3 のように実際に計算して，その点が極値の定義を満たすかどうか考える．
手順 2-3) その点で $f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} < 0$ なら極値ではない．[3]

(1) 停留点は

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -\frac{1}{x^2} + y = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{1}{y^2} = 0 \end{cases}$$

を解けば，$(x,y) = (1,1)$
次にこの点が 2 階の十分条件 ($f_{xx} < 0,\ f_{yy} < 0,\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$ なら極大，$f_{xx} > 0,\ f_{yy} > 0,\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} > 0$ なら極小) を満たしているか確認する．

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2}{x^3},\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1,\ \frac{\partial^f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{2}{y^3}$$

$(1,1)$ を代入すると，
$f_{xx} = 2, f_{xy} = f_{yx} = 1, f_{yy} = 2$ よって
$f_{xx} = 2 > 0,\ f_{yy} = 2 > 0,\ f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 3 > 0$ なので，$(x,y) = (1,1)$ は極小点であり，$f(1,1) = 3$ が極小値である．

(2) 停留点は

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 6x^2 + 6xy - 6y^2 - 6x = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x^2 - 12xy + 9y^2 = 0 \end{cases}$$

---

[3]行列を用いた極値判定のまとめ (2 変数の場合)
2 回連続微分可能な $f(x,y)$ が (x^*, y^*) で $f_x(x^*,y^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x^*,y^*) = 0 = f_y(x^*,y^*) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x^*,y^*)$ が成立していて，
(1) ヘッセ行列

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

が正値定符号なら $f(x^*,y^*)$ は極大値.
(2) ヘッセ行列

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

が負値定符号なら $f(x^*,y^*)$ は極小値.
(4) ヘッセ行列

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

の行列式が 0 なら $f(x^*,y^*)$ は極値のときと，そうでないときがある.
(3) ヘッセ行列

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{bmatrix}$$

が不定符号 (行列式が負) なら $f(x^*,y^*)$ は極値ではない.

これは因数分解できて $(x-3y)(x-y)=0$ とでき，$x=3y, x=y$ である．$x=3y$ から $(x,y)=(0,0),(\frac{9}{11},\frac{3}{11})$，$x=y$ から，$(x,y)=(0,0),(1,1)$．よって停留点は $(x,y)=(0,0),(1,1),(\frac{9}{11},\frac{3}{11})$ である．
次にこれらの点が 2 階の十分条件 ($f_{xx}<0$，$f_{yy}<0$，$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}>0$ なら極大，$f_{xx}>0$，$f_{yy}>0$，$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}>0$ なら極小) を満たしているか確認する．
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=12x+6y-6$，$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x,y)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x,y)=6x-12y$，$\frac{\partial^f}{\partial y^2}(x,y)=-12x+18y$
$(x,y)=(0,0)$ の場合，
$f_{xx}=-6, f_{xy}=f_{yx}=0, f_{yy}=0$ よって
$f_{xx}=-6<0$，$f_{yy}=0$，$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=0$ なので，これだけでは極点かどうかは分からない．
$x=0$ のとき，$f(0,y)=3y^3$ であり，このとき，
$y>0$ ならば $f(0,y)>0=f(0,0)$，　$y<0$ ならば $f(0,y)<0=f(0,0)$ となるので，(問題 3 と同様に考えると，) これは，$(x,y)=(0,0)$ が極点ではないことを意味する．
$(x,y)=(1,1)$ の場合，
$f_{xx}=12, f_{xy}=f_{yx}=-6, f_{yy}=6$ よって
$f_{xx}=12>0$，$f_{yy}=6>0$，$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=26>0$ なので，$(x,y)=(1,1)$ は極小点であり，$f(1,1)=-1$ が極小値である．
$(x,y)=(\frac{9}{11},\frac{3}{11})$ の場合，
$f_{xx}=\frac{60}{11}, f_{xy}=f_{yx}=\frac{18}{11}, f_{yy}=-\frac{54}{11}$ よって
$f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=-\frac{3564}{121}<0$ となりヘッセ行列が不定符号となり極点ではない．

解答 5

問題 5 のねらい

最小値を求める．

原点 $(0,0)$ から曲面上の点 (x,y,z) までのユークリッドの距離は
$\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{x^2+y^2+xy-5x-4y+16}\geqq 0$ である．
2 乗して $f(x,y)\stackrel{\text{def}}{=}x^2+y^2+xy-5x-4y+16$ の最小値を求める．
停留点は

$$\begin{cases} f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2x+y-5=0 \\ f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y+x-4=0 \end{cases}$$

を解いて $(x^*,y^*)=(2,1)$ である．
$f_{xx}=2>0, f_{yy}=2>0, f_{xy}=x_{yx}=1, f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=3>0$ なので，$(x,y)=(2,1)$ は極小点である．
次にこの点で最小値を達成することを示そう．
テーラー展開の定理より，また，3 階以上の偏導関数は 0 であることを考慮すると，
$\forall(h_x,h_y),\ satisfying\ (x+h_x,y+h_y)\in\mathbb{R}^2$,

$$f(x^*,y^*)=f(x^*,y^*)+h_xf_x(x^*,y^*)+h_yf_y(x^*,y^*)+\frac{1}{2}\left(h_x^2f_{xx}(x^*,y^*)+2h_xh_yf_{xy}+h_y^2f_{yy}\right)$$

$f_x(x^*,y^*)=f_y(x^*,y^*)=0, f_{xx}(x^*,y^*)=f_{yy}(x^*,y^*)=2, f_{xy}(x^*,y^*)=f_{yx}(x^*,y^*)=1$ より，

$$f(x^*,y^*)=f(x^*,y^*)+(h_x^2+h_xh_y+h_y^2)$$

$(h_x, h_y) \neq 0$ と，$h_x^2 + h_x h_y + h_y^2$ の判別式[4]が非正であることを考慮すると $h_x^2 + h_x h_y + h_y^2 \geqq 0$. よって

$$f(x^*, y^*) \leqq f(x^*, y^*)$$

よって最小値は $f(2,1) = 9$. よって求める値は 3.

解答 (6 月 25 日)

解答 6

問題 6 のねらい

1 変数関数の極値問題.

(1) 停留点は，$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$ を解いて $x = -1, 1$.
その点が極点かどうかを確認する．$f''(-1) = -6 < 0$ なので極大値 $f(-1) = 2$. $f''(1) = 6 >$ なので極小値 $f(1) = -2$.

(2) 略.

(3) 略.

(4) 略.

(5) 略.

解答 7

問題 7 のねらい

2 変数関数の極値問題.

(1) 略.

(2) 停留点は，

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y = 0 \end{cases}$$

を解いて，$(x, y) = (0, 0)$.
その点が極点かどうかを確認する．$f_{xx} = 2 > 0, f_{yy} = 2 > 0, f_{xy} = f_{yx} = 0, f_{xx}f_{yy} - f_{xy}f_{yx} = 4 > 0$. よって $(0,0)$ は極小点であり極小値は $f(0,0) = 0$.

(3) 略.

(4) 略.

---

[4] 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の解が存在するかどうかを判別式で調べることができる．$ax^2 + bx + c = 0$ の判別式とは $b^2 - 4ac$ であり，これが正なら解が 2 つ存在し，0 なら 1 つ，負なら解は存在しない．$a < 0$ のとき図を描くと上に凸のグラフになる．よってこのとき判別式が負なら，解が存在しない，即ちグラフと横軸の接点が無く，$ax^2 + bx + c$ は常に横軸より下にある．即ち $ax^2 + bx + c < 0$ となる．

(5) 停留点は,

$$\begin{cases} f_x(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - 2y = 0 \\ f_y(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y - 2x = 0 \end{cases}$$

より，$x = y$ を満たす (x,y) すべてである．
$f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$ であり，$x = y$ ならば $f(x,y) = 0$，$x \neq y$ ならば $f(x,y) > 0$ であるので，極小値は $x = y$ のときで 0 である．

解答 8

問題 8 のねらい

利潤最大化問題.

(1) $\pi(z_1,z_2) = pf(z_1,z_2) - w_1z_1 - w_2z_2 = 8\sqrt{z_1} + 6\sqrt{z_2} - 2z_1 - 3z_2, \quad z_1, z_2 > 0$ を最大化する点を求めよう．極点の候補は

$$\begin{cases} \pi_{z_1}(z_1,z_2) = 4z_1^{-\frac{1}{2}} - 2 = 0 \\ \pi_{z_2}(z_1,z_2) = 3z_2^{-\frac{1}{2}} - 3 = 0 \end{cases}$$

を解いて $(z_1^*, z_2^*) = (4,1)$.
$\pi_{11}(z_1^*,z_2^*) < 0, \pi_{22}(z_1^*,z_2^*) < 0, \pi_{12}(z_1^*,z_2^*) = \pi_{21}(z_1^*,z_2^*) = 0, \pi_{11}(z_1^*,z_2^*)\pi_{22}(z_1^*,z_2^*) - \pi_{12}(z_1^*,z_2^*)\pi_{21}(z_1^*,z_2^*) > 0$．よって $(4,1)$ は極大点である．次にこの点が最大点になっていることを示そう.
はじめに π は凹関数であることを示す.
2 回連続微分可能な関数 $\pi : \mathbb{R}^2_{++} \to \mathbb{R}$ が凹関数である.

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_ih_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial z_i \partial z_j}(z_1,z_2) \leqq 0. \text{ (定理 6.3)}$$

$$\Leftrightarrow \pi_{ii} \leqq 0,\ i = 1,2, \begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \geqq 0. \text{ (定理 5.5 から)}$$

よって $z_1, z_2 > 0$ を考慮すると，$\pi_{11} = -2z_1^{-\frac{3}{2}} < 0, \pi_{22} = -\frac{3}{2}z_2^{-\frac{3}{2}} < 0, \pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}\pi_{21} > 0$ より π は (厳密な) 凹関数である.
テーラー展開の定理より，$\forall(h_1,h_2),\ satisfying\ (z_1+h_1, z_2+h_2) \in \mathbb{R}^2_{++},\ \exists\theta \in (0,1)$,

$$\pi(z_1^*+h_1, z_2^*+h_2) = \pi(z_1^*,z_2^*) + h_1\pi_{z_1}(z_1^*,z_2^*) + h_2\pi_{z_2}(z_1^*,z_2^*) + \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_ih_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial z_i \partial z_j}(z_1^*+\theta h_1, z_2^*+\theta h_2)$$

ここで $\pi_1(z_1^*,z_2^*) = \pi_2(z_1^*,z_2^*) = 0$，また凹関数なので $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} h_ih_j \frac{\partial^2 \pi}{\partial z_i \partial z_j}(z_1,z_2) \leqq 0, \forall z_1, z_2 > 0$ を考慮すると,

$$\pi(z_1^* + h_1, z_2^* + h_2) \leqq \pi(z_1^*, z_2^*)$$

よって最大値を達成する[5]．よって求める要素投入量は $(z_1,z_2) = (4,1)$，生産量は $f(4,1) = 22$.

[5] 一般に凹関数 $f(x,y)$ が (x^*,y^*) で最大値を達成する必要十分条件は $f_i(x^*,y^*) = 0,\ i = x,y$ です.

(2) $\pi(z_1,z_2)=pf(z_1,z_2)-z_1-z_2=p(8\sqrt{z_1}+6\sqrt{z_2})-z_1-z_2,\quad p,z_1,z_2>0$ を最大化する点を求めよう．

π は凹関数であることは (1) と同様に確かめることができる．よって一階の条件を満たす点 (停留点) が最大点である．即ち，

$$\begin{cases}\pi_{z_1}(z_1,z_2)=p4z_1^{-\frac{1}{2}}-2=0\\ \pi_{z_2}(z_1,z_2)=p3z_2^{-\frac{1}{2}}-3=0\end{cases}$$

を解いて $(z_1^*,z_2^*)=(\frac{1}{2}p,p)$ であり，求める生産量は $f(z_1^*,z_2^*)=f(p)=8\sqrt{\frac{1}{2}p}+6\sqrt{p}=4\sqrt{2p}+6\sqrt{p}$.

解答 9

問題 9 のねらい

最小値を求める．

体積を $A>0$，直方体の縦，横，高さの長さをそれぞれ $x,y,z>0$ とする．よって $xyz=A$ より $z=\frac{A}{xy}$．表面積を $f(x,y)\overset{\text{def}}{=}2(xy+yz+zx)=2(xy+\frac{A}{x}+\frac{A}{y})$ とする．停留点は

$$\begin{cases}f_x(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=2(y-\frac{A}{x^2})=0\\ f_y(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2(x-\frac{A}{y^2})=0\end{cases}$$

を解いて，$(x^*,y^*)=(A^{\frac{1}{3}},A^{\frac{1}{3}})$ である．

$f_{xx}(x^*,y^*)=4\frac{A}{x^3}=4=f_{yy}(x^*,y^*)>0, f_{xy}=f_{yx}=2, f_{xx}f_{yy}-f_{xy}f_{yx}=12>0$ なので (x^*,y^*) は極小点である．

次にこの点が最小点であることを示そう．

問題 8 と同様に関数 $-f$ は凹関数であることが確認できる．

よって $-f$ の最大点は $(x^*,y^*)=(A^{\frac{1}{3}},A^{\frac{1}{3}})$ であり，よってその点は f の最小点になる．

練習問題 (6 月 29 日)

解答 10

問題 10 のねらい

陰関数定理.

「陰関数定理」

パラメータ (独立変数)x の変化が従属変数 y にどのような影響を与えるかを調べることを比較静学という (簡単に言えば $\frac{dy}{dx}$ を調べること)．y と x の関係が，$y=f(x)$ というように陽表的にあらわされているならば簡単である．では $g(y,x)=0$ というように陰伏的にあらわされているときはどうか．もしある関数 ψ が存在して，$y=\psi(x)$ というように解ければよい．しかし複雑な式の場合それは難しい，もしくは不可能かもしれないし，そもそも x と y を 1 対 1 に対応付ける関数が存在しないかもしれない．

陰関数定理とは，陰伏的にあらわされた $g(y,x)=0$ の点 $(\tilde{y},\tilde{x})$ がどういう条件を満たせば，「局所的に」$y=\psi(x)$ とできる関数 $\psi: B_\varepsilon(\tilde{x})\to B_\delta(\tilde{y})$ が存在するかを示す定理である[6]．

さらに，x の変化が y にどのような影響を与えるかについて以下が成立する．

---

[6] この局所的な陽関数とでもいうべき ψ を陰関数という．

すなわち $\psi'(\tilde{x}) = -\frac{\partial g}{\partial x}(\tilde{y},\tilde{x})/\frac{\partial g}{\partial y}(\tilde{y},\tilde{x})$ である[7].

(1) $(x,y) = (-1,2)$

(2)

$$g_1(x,y,a) \overset{\text{def}}{=} 7x + 2y + a$$
$$g_2(x,y,a) \overset{\text{def}}{=} 3x + y + a$$

とする．それぞれ連続微分可能であり，また点 $(x,y,a) = (-1,2,1)$ で $g_i(-1,2,1) = 0,\ i = 1,2$ が成立する．次のヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(-1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(-1,2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

であり，陰関数定理の前提部分を満たす.
よって (一般次元の) 陰関数定理より，
ある関数 $\psi = (\psi_x, \psi_y)$，$\psi : a \in B_\varepsilon(1) \mapsto (\psi_x(x), \psi_y(a)) \in B_\delta(-1,2) \subset \mathbb{R}^2$ が存在して， 次が成り立つ.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(-1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(-1,2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial a}(1) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial a}(1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a}(-1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial a}(-1,2) \end{bmatrix}$$

よって，

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_x}{\partial a}(1) \\ \frac{\partial \psi_y}{\partial a}(1) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_1}{\partial y}(-1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(-1,2) & \frac{\partial g_2}{\partial y}(-1,2) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial a}(-1,2) \\ \frac{\partial g_2}{\partial a}(-1,2) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

となり，a が 1 から変化したときの x, y それぞれの変化は $\frac{\partial \psi_x}{\partial a}(1) = 1$，$\frac{\partial \psi_y}{\partial a}(1) = 2$ となることがわかる.

解答 11

問題 11 のねらい

陰関数定理.

「問題文訂正：$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2 = \underline{-1}$.」

(1) $g(z,x,y) \overset{\text{def}}{=} x^2 + y^2 - z^2 + 1$ は連続微分可能で，点 $(z,x,y) = (1,0,0)$ は $g(z,x,y) = 0$ を満たす．また $\frac{\partial g}{\partial z}(1,0,0) = -2 \neq 0$ なので，陰関数定理の前提部分を満たす.
よって陰関数 $\psi : B_\varepsilon(0,0) \to B_\delta(1)$ が存在して，$\forall (x,y) \in B_\varepsilon(0,0)$ について

$$g(\psi(x,y), x, y) = 0$$

[7]一般的な次元の陰関数定理はパラメータが m 個，即ち $x \in \mathbb{R}^m$，従属変数が n 個，即ち $y \in \mathbb{R}^n$ とすると，この場合この部分の式は行列形式の多少複雑なものになるが，導出方法は同じである．すなわち恒等式を両辺微分して求めると，以下のようになる.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial y_1}(\tilde{y},\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial y_n}(\tilde{y},\tilde{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial y_1}(\tilde{y},\tilde{x}) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial y_n}(\tilde{y},\tilde{x}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial x_j}(\tilde{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial \psi_n}{\partial x_j}(\tilde{x}) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_j}(\tilde{y},\tilde{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_j}(\tilde{y},\tilde{x}) \end{bmatrix}, j = 1, \ldots, m$$

が恒等的に成り立つ．また，$1=\psi(0,0)$ である．よって実際計算すれば，

$$\psi(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}$$

(2) (1) より，実際に計算すれば $\frac{\partial\psi}{\partial x}(0,0)=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0,\ \ \frac{\partial\psi}{\partial y}(x,y)=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+1}}=0$

解答 12

問題 12 のねらい

陰関数定理.

(1) 「問題文訂正：点 $(x,y,z)=(0,1,0)$ の近傍において $\underline{x\text{ の関数として書ける}}$ ことを確認しなさい.」

$$\begin{aligned}g_1(y,z,x)&\overset{\text{def}}{=}x^2+y^2+z^2-1\\ g_2(y,z,x)&\overset{\text{def}}{=}x+2z\end{aligned}$$

とする．それぞれ連続微分可能であり，点 $(y,z,x)=(1,0,0)$ で $g_i(1,0,0)=0,\ i=1,2$ が成立する．次にヤコビ行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(1,0,0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(1,0,0)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2&0\\0&2\end{vmatrix}=4\neq 0$$

であり，陰関数定理の前提部分を満たす.
よって陰関数定理より，ある関数 $\psi=(\psi_y,\psi_z)$，$\psi: x\in B_\varepsilon(0)\mapsto(\psi_y(x),\psi_z(x))\in B_\delta(1,0)\subset\mathbb{R}^2$ が存在して，$\forall x\in B_{\varepsilon_y}(0)\cap B_{\varepsilon_z}(0)$ について，

$$\begin{aligned}g_1(\psi_y(x),\psi_z(x),x)=0\\ g_2(\psi_y(x),\psi_z(x),x)=0\end{aligned}$$

が成立する．よって，方程式 $g_i(y,z,x)=0,\ i=1,2$ の解が，点 $(y,z,x)=(1,0,0)$ の近傍で x の関数として書くことができる.

(2) 陰関数定理より

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(1,0,0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(1,0,0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\partial\psi_y}{\partial x}(0)\\ \frac{\partial\psi_z}{\partial x}(0)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0,0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0,0)\end{bmatrix}$$

よって，

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial\psi_y}{\partial x}(0)\\ \frac{\partial\psi_z}{\partial x}(0)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_1}{\partial z}(1,0,0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial y}(1,0,0) & \frac{\partial g_2}{\partial z}(1,0,0)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial x}(1,0,0)\\ \frac{\partial g_2}{\partial x}(1,0,0)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&0\\0&\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

練習問題 (7 月 2 日)

解答 13

問題 13 のねらい

限界代替率.

(1) $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in\mathbb{R}^2_{++}$ について，$u(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\bar{x_1}^{\alpha}\bar{x_2}^{\beta}=\bar{u}$ とする．
$g(x_2,x_1)\overset{\text{def}}{=}u(x_1,x_2)-\bar{u}=x_1^{\alpha}x_2^{\beta}-\bar{u}$ とする．g は連続微分可能であり，点 $(\bar{x}_2,\bar{x}_1)$ は $g(\bar{x}_2,\bar{x}_1)=0$ を満たす．さらに $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in\mathbb{R}^2_{++}$ を考慮すると $\frac{\partial g}{\partial x_2}(\bar{x}_2,\bar{x}_1)=u_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\overset{\text{def}}{=}\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1,\bar{x}_2)=\beta\bar{x_1}^{\alpha}\bar{x_2}^{\beta-1}\neq 0$.
よって陰関数定理より，ある連続微分可能な関数 $\psi:B_\varepsilon(\bar{x}_1)\to B_\delta(\bar{x}_2)$ が存在して，$\forall x_1\in B_\varepsilon(\bar{x}_1)$ について，$g(\psi(x_1),x_1)=0$ が恒等的に成立する，すなわち $u(x_1,\psi(x_1))=\bar{u}$ である．$\{(x_1,\psi(x_1))\in\mathbb{R}^2_{++}|x_1\in B_\varepsilon(\bar{x}_1)\}$ は $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ の近傍で $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ と同一無差別曲線上にある．さらに $\bar{x_2}=\psi(\bar{x}_1)$ である．よって $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\in\mathbb{R}^2_{++}$ における 1 財の 2 財に関する限界代替率 $(MRS(\bar{x}_1,\bar{x}_2))$ とは，その点における無差別曲線の傾き (縦軸に第 2 財，横軸に第 1 財をとる) にマイナスをかけたもののことなので
$$MRS(\bar{x}_1,\bar{x}_2)\overset{\text{def}}{=}-\frac{\partial\psi}{\partial x_1}(\bar{x}_1)=\frac{u_1(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}{u_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2)}=\frac{\alpha\bar{x_2}}{\beta\bar{x_1}}$$

(2) $(x_1,x_2)=(2,1)\in\mathbb{R}^2_{++}$ なので，(1) より $\mathrm{MRS}=\frac{2\alpha}{\beta}$.

(3) $\frac{\alpha\bar{x_2}}{\beta\bar{x_1}}$ は微分可能である．$\dfrac{\partial\left(\frac{\alpha\bar{x_2}}{\beta\bar{x_1}}\right)}{\partial\bar{x}_1}=-\dfrac{\alpha}{\beta}\bar{x_1}\bar{x_2}^{-2}<0.$

解答 14

問題 14 のねらい

(条件付) 最大化問題.

$f(x,y)=xy$ が $g(x,y)=x+y-2=0$ 上を動くので，
$F(x)=x(2-x)=-x^2+2x$ の最大，最小，極大，極小値を求める．
停留点は $F'(x)=-2x+2=0$ を解いて，$x^*=1$．(よって $y^*=1$．)
$F''(x^*)=-2<0$ なので，$F(x^*)$ は極大値であり，求める値は $F(x^*)=f(x^*,y^*)=1$ である．さらに問題 1 と同様に最大値でもある．他に極点は無いので極小値は存在せず，さらに $g(x,y)=x+y-2=0$ 上で $x\to+\infty$ のとき $y\to-\infty$ なので $f(x,y)\to-\infty$ でありいくらでも小さくなるので，最小値も存在しない．