(上級) 経済数学 第三章練習問題
解答編

竹下享佑[*]，高羅ひとみ[†]

平成 21 年 7 月 9 日

解答 (6 月 4 日)

解答 1

問題 1 のねらい

2 変数関数の微分の定義を理解し，証明で用いることができるかを確認する．

f を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数とし，$\bar{x} \overset{\mathrm{def}}{=} (\bar{x_1}, \bar{x_2})$ において微分可能であるとする．$h = (h_1, 0), h_1 \neq 0$ とする．f の微分可能性の定義により，2 つの実数 a_1，a_2 と関数 $o(\bar{x}, h)$ が存在して，

$$
\begin{aligned}
&f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + a_1 h_1 + o(\bar{x}, h) \\
&\lim_{h \to 0} \frac{o(\bar{x}, h)}{|h_1|} = 0
\end{aligned}
$$

が成立する．

$$
\begin{aligned}
\frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_1} &= \frac{a_1 h_1 + o(\bar{x}, h)}{h_1} \\
&= a_1 + \frac{o(\bar{x}, h)}{|h_1|} \cdot \frac{|h_1|}{h_1}
\end{aligned}
$$

である．ここで，$-1 \leqq \frac{|h_1|}{h_1} \leqq 1$ かつ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{o(\bar{x}, h)}{|h_1|} = 0$ であるので，

$$
\lim_{h_1 \to 0} \frac{o(\bar{x}, h)}{|h_1|} \cdot \frac{|h_1|}{h_1} = 0
$$

である．したがって，

$$
\lim_{h_1 \to 0} \frac{f(\bar{x}_1 + h_1, \bar{x}_2) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2)}{h_1} = a_1
$$

となる．これは f が $\bar{x}_1$ において偏微分可能であることを意味する．

f が $\bar{x}_2$ において偏微分可能であることも同様にして示すことができる．よって，f は $\bar{x}$ において偏微分可能である．

[*] *E-mail:* addmailadd-2009ta@yahoo.co.jp
[†] *E-mail:* hitomikoura@hotmail.com

解答 2

問題 2 のねらい

偏微分の性質を用いることができるようになること．

(1) $\forall x_2 \in \mathbb{R},\ \forall x_1, x_1' \in \mathbb{R},\ f(x_1, x_2) = f(x_1', x_2)$.

(2) 任意に $\bar{x_2} \in \mathbb{R}$ をひとつ固定する．$f(x_1, \bar{x_2})$ は x_1 のみを変数とした関数とみなせる．$\forall x_1 \in \mathbb{R},\ F(x_1) \overset{\text{def}}{=} f(x_1, \bar{x_2})$ とする．仮定より f は $\mathbb{R}^2$ 上で連続，微分可能なので，$\forall x_1, x_1' \in \mathbb{R}\ (x_1 < x_1')$，$F$ は $[x_1, x_1']$ 上で連続，(x_1, x_1') 上で微分可能である．平均値の定理より

$$\exists \xi \in (x_1, x_1'),\ F'(\xi) = \frac{F(x_1') - F(x_1)}{x_1' - x_1}$$

$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x, \bar{x_2})$ なので ($\bar{x_2}$ は固定しているので，$\frac{\partial f}{\partial x_2}$ は 0)，仮定より $F'(\xi) = 0$ よって，

$$F'(\xi) = 0 = \frac{F(x_1') - F(x_1)}{x_1' - x_1} \Leftrightarrow F(x_1) = F(x_1') \Leftrightarrow f(x_1, \bar{x_2}) = f(x_1', \bar{x_2}).$$

解答 3

問題 3 のねらい

偏導関数を求めることができるようになること．

(1) $\partial f/\partial x(x, y) = yx^{y-1},\ \partial f/\partial y(x, y) = x^y \log x$.

(2) $\partial f/\partial x(x, y) = \frac{1}{y}x^{\frac{1}{y}-1} - \frac{1}{x^2}(\log y)y^{\frac{1}{x}},\ \partial f/\partial y(x, y) = -\frac{1}{y^2}(\log x)x^{\frac{1}{y}} + \frac{1}{x}y^{\frac{1}{x}-1}$.

(3) $\partial f/\partial x(x, y) = \frac{2x}{x^2+y^2},\ \partial f/\partial y(x, y) = \frac{2y}{(x^2+y^2)}$.

(4) $\partial f/\partial x(x, y) = \partial f/\partial y(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x+y}}$.

(5) $\partial f/\partial x(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{x}},\ \partial f/\partial y(x, y) = 1$.

(6) $\partial f/\partial x(x, y) = \frac{1}{x},\ \partial f/\partial y(x, y) = 1$.

練習問題 (6 月 8 日)

解答 4

問題 4 のねらい

接平面の方程式を求めることと偏微分係数の関係を具体的に知ること．

(1) $f(x, y) = x^2 + y^2$ とおく．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1, 2) = 2 \times 1 = 2,\ \frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 2 \times 2 = 4$$

であるから，接平面の方程式は,

$$z - 5 = 2(x - 1) + 4(y - 2),\ \text{すなわち}\ z = 2x + 4y - 5$$

である．

(2) $f(x,y)=xy$ とおく．

$$\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)=3,\ \frac{\partial f}{\partial y}(2,3)=2$$

であるから，接平面の方程式は,

$$z-6=3(x-2)+2(y-3),\ \text{すなわち}\ z=3x+2y-6$$

である．

解答 5

問題 5 のねらい

勾配ベクトルの性質について知ること．

(1) f,g を $\mathbb{R}^2$ 上で定義された実数値関数とし，任意の $x\in\mathbb{R}^2$ で偏微分可能であるとする．勾配ベクトルの定義より,

$$\mathrm{grad}(f+g)(x)=\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}(x_1,x_2),\frac{\partial(f+g)}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)$$

である．定理 2.1 より,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial(f+g)}{\partial x_1}(x_1,x_2),\frac{\partial(f+g)}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2)+\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)+\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\\
&=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1,x_2),\frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)+\left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1,x_2)+\frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1,x_2)\right)\\
&=\mathrm{grad}f(x)+\mathrm{grad}g(x)
\end{aligned}$$

である．したがって，$\mathrm{grad}(f+g)(x)=\mathrm{grad}f(x)+\mathrm{grad}g(x)$ である．

(2) 略

(3) 略

解答 6

問題 6 のねらい

合成関数の微分を行えるようになること．

(1) (問題文訂正「$r\geqq 0$ とする」) 同次関数の定理 (定理 4.3) より
$f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}$ が m 次同次関数であることの必要十分条件は,

$$\forall x,y\in\mathbb{R}^2_+,\ x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)+y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=mf(x,y)$$

が成立することである．
よって問題の $f(x,y)$ は 0 次同次関数なので,
$r\neq 0$ のとき，$z=f(r\cos\theta,r\sin\theta)=(\frac{1}{r})^0f(r\cos\theta,r\sin\theta)=f(\frac{1}{r}r\cos\theta,\frac{1}{r}r\sin\theta)=f(\cos\theta,\sin\theta)$ となり，z は r に依存しない θ のみの関数である．
$r=0$ のとき，$z=f(0,0)$ となり，r に依存しない (θ にも依存しませんが，) 関数である (常に $f(0,0)$ という値をとる定数関数)．

(2) $\phi(y_1, y_2) = \sqrt{(2x_1+3x_2)^2+(x_1x_2)^2}$ なので

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{1}{2\sqrt{(2x_1+3x_2)^2+(x_1x_2)^2}}(2(2)(2x_1+3x_2)+2x_1x_2^2)$$
$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2} = \frac{1}{2\sqrt{(2x_1+3x_2)^2+(x_1x_2)^2}}(2(3)(2x_1+3x_2)+2x_2x_1^2)$$

$(x_1, x_2) = (-1, 1)$ より，$(\frac{\partial\phi}{\partial x_1}, \frac{\partial\phi}{\partial x_2}) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 2\sqrt{2})$

(解説) 多変数関数の合成関数の微分ですが，1 変数の場合ができればそれほど問題はないはずです．偏微分とは，他の変数は一定として (1 変数関数におけるただの数とみなして)，ある変数で微分することですから，後はミスをしないように計算するだけです．

練習問題 (6 月 11 日)

解答 7

問題 7 のねらい

ヤングの定理の確認．

(1) $(x, y) \neq (0, 0)$ のとき $f(x, y) = \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$ は明らかに偏微分可能であり，(1 変数関数の場合もそうだったが，2 変数関数の場合，微分可能性を確認することはさらにめんどうである．明らかに関数が入れ替わっている点を除き，1 変数関数を組み合わせて作った 2 変数関数は普通は微分可能である．)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y-y^5+4x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^5-4x^3y^2-xy^4}{(x^2+y^2)^2}$$

となり，さらに偏微分可能であり，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x, y) = \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x, y).$$

(2) h_1，h_2 を任意のゼロでない実数とする．

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, h_2) &= \lim_{h_1\to 0}\frac{f(0+h_1, h_2)-f(0, h_2)}{h_1} = \lim_{h_1\to 0}\frac{h_1h_2\dfrac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{h_1}\\ &= \lim_{h_1\to 0} h_2\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = -h_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(h_1, 0) &= \lim_{h_2\to 0}\frac{f(h_1, 0+h_2)-f(h_1, 0)}{h_2} = \lim_{h_2\to 0}\frac{h_1h_2\dfrac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2}}{h_2}\\ &= \lim_{h_2\to 0} h_1\frac{h_1^2-h_2^2}{h_1^2+h_2^2} = h_1\end{aligned}$$

であるから,

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h_2 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0+h_2) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h_2} = \lim_{h_2 \to 0} \frac{-h_2}{h_2} = -1
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h_1 \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0+h_1,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h_1} = \lim_{h_1 \to 0} \frac{h_1}{h_1} = 1
$$

(3) (解答その 1) $-1 \leqq \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$, $-1 \leqq \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqq 1$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \times \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \times (x^2-y^2) \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である.

(解答その 2) $0 \leqq \frac{x^2}{x^2+y^2} \leqq 1$, $0 \leqq \frac{y^2}{x^2+y^2} \leqq 1$ であるから,

$$
\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) &= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \\
&= \lim_{(x,y)\to(0,0)} xy \times \left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2} \right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

である.

解答 8

問題 8 のねらい

具体的に数値を入れてテーラー展開すること.

実際に偏導関数を求めるとわかりますが, 3 階偏導関数以上は 0 になっていて無限回微分可能です.

1 階偏導関数, 偏微分係数

$$
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 4x + 3y - 5, \ \frac{\partial f}{\partial x}(2,-1) = 0
$$

$$
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 3x + 10y + 4, \ \frac{\partial f}{\partial y}(2,-1) = 0
$$

2 階偏導関数, 偏微分係数

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 4, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1) = 4
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx}(x,y) = 3, \ \frac{\partial^2 f}{\partial xy}(2,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = 3
$$

$$
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 10, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1) = 10
$$

3 階偏導関数以上は 0.
さらに

$$f(2,-1)=1.$$

テーラー展開の定理より，
$x=2+h, y=-1+k$ とすると，
$f(x,y)$
$= f(2,-1)+\dfrac{1}{1!}\left(h\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)+k\dfrac{\partial f}{y}(2,-1)\right)$
$\quad +\dfrac{1}{2!}\left(h^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1)+hk\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(2,-1)+kh\dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(2,-1)+k^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-1)\right)+0$
$= f(2,-1)+\dfrac{1}{1!}\left((x-2)\dfrac{\partial f}{\partial x}(2,-1)+(y+1)\dfrac{\partial f}{y}(2,-1)\right)$
$\quad +\dfrac{1}{2!}\left((x-2)^2\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-1)+(x-2)(y+1)\dfrac{\partial^2 f}{\partial xy}(2,-1)+(y+1)(x-2)\dfrac{\partial^2 f}{\partial yx}(2,-1)+(y+1)^2\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}(2,-1)\right)$

$f(x,y) = 1+(x-2)\cdot 0+(y+1)\cdot 0+\frac{1}{2}((x-2)^2\cdot 4+(x-2)(y+1)\cdot 3+(y+1)(x-2)\cdot 3+(y+1)^2\cdot 10)$
$\qquad\quad = 1+2(x-2)^2+3(x-2)(y+1)+5(y+1)^2$

解答 9

問題 9 のねらい

高次導関数を計算できるようになること

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(cx+y)\times c,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(cx+y)$$

であるから，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\sin(cx+y)\times c^2,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\sin(cx+y)$$

である．よって，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=c^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

である．

(2)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\cos(cx+y)\times c-\sin(2cx+2y)\times 2c,$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(cx+y)-\sin(2cx+2y)\times 2$$

であるから，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\sin(cx+y)\times c^2-\cos(2cx+2y)\times 4c^2,$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=-\sin(cx+y)-\cos(2cx+2y)\times 4$$

である．よって，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$$

である．

解答 10

問題 10 のねらい

様々な関数について同次関数であるか確認できるようになること．

(1) 任意の $\lambda \geqq 0$，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ について，

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^2 + \lambda x \lambda y + (\lambda y)^2 \\ &= \lambda^2 (x^2 + xy + y^2) \\ &= \lambda^2 f(x,y) \end{aligned}$$

となるので，f は 2 次同次関数．

(2) 任意の $\lambda \geqq 0$，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ について，

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= a(\lambda x)^\alpha (\lambda y)^\beta \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} a x^\alpha y^\beta \\ &= \lambda^{\alpha+\beta} f(x,y) \end{aligned}$$

となるので，f は $\alpha + \beta$ 次同次関数．

(3) $f = \alpha \log x + \beta \log y$ が m 次同次と仮定すると，
$\forall \lambda > 0$,
$f(\lambda x, \lambda y) = \alpha \log \lambda x + \beta \log \lambda y = \alpha(\log \lambda + \log x) + \beta(\log \lambda + \log y)$
$= \lambda(\alpha \log x + \beta \log y) = \lambda f(x,y)$
が $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2_{++}$ について成立する．$(x,y) = (1,1)$ とすると，
$f(\lambda, \lambda) = \alpha \log \lambda + \beta \log \lambda = (\alpha + \beta) \log \lambda$
$\lambda f(1,1) = 0$
であり，例えば，$\lambda = e$ のときこれら 2 式は等しくならない．よって矛盾．よって同次関数ではない．

(4) 任意の $\lambda \geqq 0$，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ について，

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= ((\lambda x)^{1-\rho} + (\lambda y)^{1-\rho})^{\frac{1}{1-\rho}} \\ &= (\lambda^{1-\rho}(x^{1-\rho} + y^{1-\rho}))^{\frac{1}{1-\rho}} \\ &= \lambda (x^{1-\rho} + y^{1-\rho})^{\frac{1}{1-\rho}} \\ &= \lambda f(x,y) \end{aligned}$$

となるので，f は 1 次同次関数．

(5) 任意の $\lambda \geqq 0$，任意の $(x,y) \in \mathbb{R}^2_+$ について，

$$\begin{aligned} f(\lambda x, \lambda y) &= (\lambda x)^{1-\rho} + (\lambda y)^{1-\rho} \\ &= \lambda^{1-\rho}(x^{1-\rho} + y^{1-\rho}) \\ &= \lambda^{1-\rho} f(x,y) \end{aligned}$$

となるので，f は $1-\rho$ 次同次関数．

練習問題 (6 月 15 日)

解答 11

問題 12 のねらい

2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ 上の点列の収束の定義を用いることができるようになること.

(1) $x^n \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^n, x_2^n), y^n \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^n, y_2^n), z^n \stackrel{\text{def}}{=} (z_1^n, z_2^n), n = 1, 2, \ldots$ を 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の中の点列とし，$x^n, y^n, n = 1, 2, \ldots$ はそれぞれ $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2), y \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, y_2)$ に収束するとする．$x^n \leqq z^n \leqq y^n, n = 1, 2, \ldots$ であり，かつ $x = y$ とする．すべての $n = 1, 2, \ldots$ について，

$$x_i^n \leqq z_i^n \leqq y_i^n$$

である，$i = 1, 2$．点列 $x^n, y^n, n = 1, 2, \ldots$ は x に収束するから，定義により，実数列 $x_i^n, y_i^n, n = 1, 2, \ldots$ は x_i に収束する，$i = 1, 2$．よって，定理 1.1 を用いると，実数列 $z_i^n, n = 1, 2, \ldots$ は x_i に収束する，$i = 1, 2$．定義により，これは点列 $z^n = (z_1^n, z_2^n), n = 1, 2, \ldots$ が $x = (x_1, x_2)$ に収束することを意味する．

(2) $x^n \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^n, x_2^n), y^n \stackrel{\text{def}}{=} (y_1^n, y_2^n), n = 1, 2, \ldots$ を 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ の中の点列とし，$x^n, y^n, n = 1, 2, \ldots$ はそれぞれ $x \stackrel{\text{def}}{=} (x_1, x_2), y \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, y_2)$ に収束するとする．

(解答その１) 定義より，実数列 $x_i^n, y_i^n, n = 1, 2, \ldots$ はそれぞれ x_i, y_i に収束する，$i = 1, 2$．よって，定理 1.1 より，実数列 $x_i^n + y_i^n, n = 1, 2, \ldots$ は $x_i + y_i$ に収束する，$i = 1, 2$．これは定義より，点列 $x^n + y^n = (x_1^n + y_1^n, x_2^n + y_2^n), n = 1, 2, \ldots$ が $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ に収束することを意味する．

(解答その２) 定理 4.5 より，実数値としての列 $\| x^n - x \|, \| y^n - y \|, n = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束する．h を任意の正の数とする．$h/2$ も正の数である．ある番号 n_1 が存在して，n_1 以上のどのような番号 n についても

$$\| x^n - x \| < \frac{h}{2}$$

が成立する．また，ある番号 n_2 が存在して，n_2 以上のどのような番号 n についても

$$\| y^n - y \| < \frac{h}{2}$$

が成立する．よって，$n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$ とすれば，n_0 以上のどのような番号 n についても，

$$\begin{aligned}
\| x^n + y^n - (x + y) \| &= \| x^n - x + y^n - y \| \\
&\leqq \| x^n - x \| + \| y^n - y \| \\
&< \frac{h}{2} + \frac{h}{2} = h
\end{aligned}$$

が成立する[1]．これは実数値としての列 $\| x^n + y^n - (x + y) \|, n = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束することを意味する．したがって，定理 4.5 より，点列 $x^n + y^n, n = 1, 2, \ldots$ は $x + y$ に収束する．

[1] $\mathbb{R}^2$ を定義域とし $\mathbb{R}_+$ を値域とする関数 g がノルムであるとは，(1) $g(ax) = |a|g(x)$, $a \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^2$，(2) $g(x + y) \leqq g(x) + g(y)$, $x, y \in \mathbb{R}^2$，(3) $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = (0, 0)$, $x \in \mathbb{R}^2$ を満たすものをいう (6 月 15 日の講義ノートを参照)．2 行目の不等号は (2) を用いている．

(3) 略.

(4) 略.

解答 12

問題??のねらい

論理力がどれほどあるかみること.

(必要性) 点列 $x^n = (x_1^n, x_2^n) \in \mathbb{R}^2, n = 1, 2, \ldots$ が座標ごとに $x = (x_1, x_2)$ に収束するとする．h を任意の正の数とする．$h/\sqrt{2}$ は正の数であるので，列 x_1^n, $\ldots$ が x_1 に収束することから，ある番号 n_1 が存在して，n_1 以上のどのような番号 n についても

$$|x_1^n - x_1| < \frac{h}{\sqrt{2}}$$

が成立する．また，列 x_2^n, $\ldots$ が x_2 に収束することから，ある番号 n_2 が存在して，n_2 以上のどのような番号 n についても

$$|x_2^n - x_2| < \frac{h}{\sqrt{2}}$$

が成立する．$n_0 \stackrel{\text{def}}{=} \max\{n_1, n_2\}$ とすれば，n_0 以上のどのような番号 n についても

$$\begin{aligned}\|x^n - x\| &= \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + (x_2^n - x_2)^2} \\ &< \sqrt{\frac{h^2}{2} + \frac{h^2}{2}} = h\end{aligned}$$

が成立する．これは $\|x^n - x\|$, $n = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束することを意味する.
(十分性) $\|x^n - x\|$, $n = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束するとする．h を任意の正の数とする．ある番号 n_0 が存在して，n_0 以上のどのような番号 n についても

$$|x_i^n - x_i| = \sqrt{(x_i^n - x_i)^2} \leqq \sqrt{(x_1^n - x_1)^2 + (x_2^n - x_2)^2} < h,\ i = 1, 2$$

が成立する．これは座標ごとの実数列が対応する極限に収束することを示している.

解答 13

問題 13 のねらい

2 変数の実数値関数の連続性の定義 (定義 4.4) を用いることができるようになること.

(1) f, g を $\mathbb{R}^2$ を定義域とする 2 変数の実数値連続関数とする．$\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を定義域 $\mathbb{R}^2$ の任意の点とする．$x^n \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^n, x_2^n), n = 1, 2, \cdots$ を $\bar{x}$ に収束する任意の点列とする．f, g は連続関数であるから，定義により，実数列 $f(x_1^n, x_2^n), g(x_1^n, x_2^n), n = 1, 2, \cdots$ はそれぞれ $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2), g(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に収束する．定理１．１より，実数列 $f(x_1^n, x_2^n) \times g(x_1^n, x_2^n), n = 1, 2, \cdots$ は $f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \times g(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に収束する．これは関数 $f(\cdot) \times g(\cdot)$ の $\bar{x}$ における連続性を意味する．$\bar{x}$ は定義域 $\mathbb{R}^2$ の任意の点であるから，関数 $f(\cdot) \times g(\cdot)$ は連続である.

(2) 略

(3) 略