

(上級) 経済数学：期末試験

2009年7月30日, 入谷

第1章問題

(1) $a_n, b_n, c_n, n = 1, 2, \dots$ を実数列とし, $a_n, b_n, n = 1, 2, \dots$ はそれぞれ a, b に収束すると仮定する. $a_n \leq c_n \leq b_n, n = 1, 2, \dots$ かつ $a = b$ であれば, $a = b = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$ となることを示しなさい.

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を \mathbb{R} を定義域とし \mathbb{R} を値域とする連続関数とする. 合成関数 $f(g(x))$ は連続関数であることを示しなさい.

(3) A と B という2つの命題があるとき, $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow ((\neg B) \Rightarrow (\neg A))$ が真であることを示しなさい.

第2章問題

閉区間 $[a, b], a < b$ 上で定義された実数値関数 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は开区間 (a, b) の各点において2回連続微分可能であるとする. 以下が成立することを示しなさい.

(1) f が $c \in (a, b)$ で最小値を達成するならば, $f'(c) = 0$ かつ $f''(c) \geq 0$ が成立することを示しなさい. (ヒント: 微分の定義とテーラー展開)

(2) $c \in (a, b)$ で $f'(c) = 0$ かつ任意の $x \in (a, b)$ について $f''(x) > 0$ であれば, f は c で最小値を達成することを示しなさい. (ヒント: テーラー展開)

第3章問題

(1) f を \mathbb{R}^2 上で定義された実数値関数とする. f が $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ において微分可能であるならば, f は \bar{x} において偏微分可能であり, 連続であることを示しなさい.

(2) $u(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta, (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2, \alpha, \beta > 0$ とする. $L \stackrel{\text{def}}{=} \{(x_1, x_2) \mid u(x_1, x_2) = 1\} \neq \emptyset$ とするとき, $(1, 1)$ における L の接線の方程式と法線を求めなさい.

第4章問題

ある生産者の生産関数を $f(x_1, x_2) = 2\sqrt{x_1} + 2\sqrt{x_2}$ とする. ただし, x_i は第 i 生産要素の投入量である, $i = 1, 2$. 生産物価格を $p = 1$, 要素価格を $w_1 = 2, w_2 = 1$ とする. 次の問に答えなさい.

(1) f が凹関数であることを示しなさい.

(2) 利潤を最大にする各要素投入量を求めなさい.

(3) 陰関数定理を用いて, p の値が1から微小に増加したとき, (2) で求めた各要素投入量はどのように変化するか答えなさい.

第 5 章問題

(1) 定理 1 の内容を図を用いて説明しなさい。

定理 1 A を \mathbb{R}^2 上の凸集合とする。連続微分可能な関数 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ が準凹関数であるとする。このとき、任意の $x, y \in A$ について $f(x) > f(y)$ かつ $\nabla f(y) \neq (0, 0)$ であれば、 $\nabla f(y)(x - y) > 0$ が成立する。

(2) 効用関数 $u(x_1, x_2)$ は定義域 \mathbb{R}_+^2 において連続で、 \mathbb{R}_{++}^2 において連続微分可能であるとする。さらに、 p_1, p_2, I はいずれも正値と仮定する。次の最大化問題に解があることを論証しなさい。

$$\max_{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}_+^2} u(x_1, x_2) \quad \text{subject to } p_1 x_1 + p_2 x_2 \leq I \quad (1)$$

(3) (2) の仮定に加えて、効用関数が準凹関数であり、 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}_{++}^2$, $\tilde{\lambda} (\tilde{\lambda} > 0)$ が

$$\begin{cases} I - p_1 \tilde{x}_1 - p_2 \tilde{x}_2 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{\lambda} p_1 = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{\lambda} p_2 = 0 \end{cases}$$

を満たすとする。このとき、 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ は効用最大化問題 (1) の解であることを、定理 1 を用いて、示しなさい。