基礎経済数学中間テスト：ねらいと解説

問題 I. 実数の全体 $\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\bar{x} \in \mathbb{R}$ において微分可能であるならば，この関数 f は $\bar{x} \in \mathbb{R}$ において連続であることを示しなさい．

ねらい：微分可能性の定義への理解力と応用力

解説と解答

配布の講義ノートの 1.4 節で微分可能性の定義が与えられている。そこでは，f を $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数とするとき，$\bar{x}$ において微分可能であるとは，

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \text{ が存在すること}$$

と約束されている。このとき重要なことは，$h \to 0$ の任意性である。ゼロに収束するならどのような列でもよいのである。もちろん，h は分母に入っているから，$h = 0$ のような事態は想定していない。つまり，$h_n, n = 1, 2, \ldots$ を任意のゼロに収束する非ゼロの実数列とするとき，極限 $\lim_{n\to\infty}(f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x}))/h_n$ がある一定値に収束し，ゼロの収束する列の選択によらず同一の値となることである。

一方，$f(\cdot)$ が $\bar{x} \in \mathbb{R}$ で連続であるとは，$\bar{x}$ に収束する任意の列 $x_n, n = 1, 2, \ldots$ にたいして，列 $f(x_n), n = 1, 2, \ldots$ が $f(\bar{x})$ に収束することであり，微分と同様に，列の選択によらずこの収束性が成り立つことである。さらに，$x_n \to \bar{x}$ as $n \to \infty$ は $h_n = x_n - \bar{x}, n = 1, 2, \ldots$ とすれば，$h_n, n = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束することと同値である。

以上に注意して，多少くどいかもしれないが，丁寧な解答をしてみよう。$h_n, n = 1, 2, \ldots$ を任意のゼロに収束する実数列とする。いくつかのケースが考えられる。(i) 有限個（ゼロ個も許す）の n について $h_n = 0$ となっている場合，(ii) 無限個の n について $h_n = 0$ となっている場合，である。

［(i) 有限個の n について $h_n = 0$ である場合］

このとき，$h_n = 0$ となる n の最大値 $\hat{n}$ が存在する。したがって，十分大きな n については $h_n \neq 0$ と考えることに問題はない。よって，

$$f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x}) = \frac{f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x})}{h_n} h_n, \text{ for } n > \hat{n}$$

となる。これは，講義ノートの定理 1.1 (iv) と微分の定義を見ると，

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x}) &= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x})}{h_n} h_n \right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left\{ \frac{f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x})}{h_n} \right\} \times \lim_{n\to\infty} h_n \\
&= f'(\bar{x}) \times 0 = 0
\end{aligned}$$

が得られる。よって，

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}+h_n) = \lim_{n\to\infty} \bigl(f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x}) + f(\bar{x})\bigr) = \lim_{n\to\infty} \bigl(f(\bar{x}+h_n) - f(\bar{x})\bigr) + f(\bar{x}) = f(\bar{x})$$

となって，f は $\bar{x}$ で連続である。
［(ii) 無限個の n について $h_n = 0$ となっている場合］
このサブケースに，$h_n \neq 0$ となる n が有限個であるという場合がある。このときには，ある番号 $\hat{n}$ より大きな n についてはすべて $h_n = 0$ であるので，$f(\bar{x}+h_n) = f(\bar{x})$ がすべての $n > \hat{n}$ について成立する。よって，この場合は $n \to \infty$ のとき $f(\bar{x}+h_n) \to f(\bar{x})$ は自明である。したがって，$h_n \neq 0$ となる n が無限個である場合が問題である。$h_n \neq 0$ となる n の集合を $F \stackrel{\text{def}}{=} \{n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots\}, n_i < n_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$ とする。そこで，$f(\bar{x}+h_{n_i}) - f(\bar{x})$ について (i) と同様の処理を与えることができるから，

$$\lim_{i\to\infty} f(\bar{x}+h_{n_i}) = f(\bar{x})$$

を示すことができる。一方，$n \notin F$ に関しては，$\bar{x}+h_n = \bar{x}$ であるから，$f(\bar{x}+h_n) = f(\bar{x})$ が成立している。したがって，これらを総合すれば，

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}+h_n) = f(\bar{x})$$

ということになる。

(i), (ii) より f の $\bar{x}$ における連続性が示された。

問題 II. 以下の関数の導関数を求めなさい.

$$(1)\ y = \frac{1}{x}\ ,\ x > 0 \qquad (2)\ y = \log\frac{1}{x}\ ,\ x > 0 \qquad (3)\ y = \cos x$$
$$(4)\ y = e^{x^x},\ \ x > 0 \qquad (5)\ y = e^{\log x},\ x > 0$$

ねらい：合成関数の微分と実際の演算

解説と解答

二つの関数 f, g があって，ともに $\mathbb{R}$ を定義域とする実数値関数で，微分可能であるとする。このとき，$h(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(g(x))$ とすれば h は f と g の合成によって作られる関数なので，合成関数と呼ばれる。このときに,［合成関数の微分］

$$h'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

が成り立つ（講義ノート第 2 章 定理 2.1)。出題の目的は適切に合成関数の微分が使えるかを尋ねている。

（1）これは合成関数の微分を必ずしも用いなくても良い。$y = x^{-1}$ であること事実に着目する。そこで，べき乗が実数の関数の微分（講義ノート第 2 章 2.4 節）から，

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$$

であるから，

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

である。あるいは，分数関数の微分（定理 2.1 (iv)）を用いても良い。

（2）$y = \log(1/x),\ x > 0$ については，二つの関数，$f(x) = \log x$, $g(x) = 1/x$ の合成を考えると，

$$\begin{aligned}\left(\log\frac{1}{x}\right)' &= (f(g(x)))' = f'(g(x)) \times g'(x)\\ &= \frac{-1/x^2}{1/x} = -\frac{1}{x},\end{aligned}$$

である。

（3）これも合成関数の微分ではないが，微分演算の知識を尋ねている（講義ノート第 2 章 2.6 節)。

$$\cos' x = -\sin x$$

（4）$y = e^{x^x},\ x > 0$ の微分については，二つの関数，$f(x) = e^x,\ g(x) = x^x$ を合成して求める。まず，$f'(x) = e^x$ は講義ノート第 2 章 2.5 で指数関数の微分として学んでいる。さらに，$\log g(x) = x\log x$ であることに着目して（やはり合成関数の微分），

$$\begin{aligned}\frac{g'(x)}{g(x)} &= \log x + x \times \frac{1}{x} = \log x + 1\\ g'(x) &= (1+\log x)x^x\end{aligned}$$

となるから，したがって，

$$\begin{aligned}\left(e^{x^x}\right)' &= f'(g(x))g'(x)\\ &= e^{x^x} \cdot (1+\log x)x^x\end{aligned}$$

である。

（5）$y = e^{\log x},\ x > 0$ の微分は $e^{\log x} = x$ が恒等式であることに気が付けば，

$$\left(e^{\log x}\right)' = 1$$

である。あるいは，合成関数の微分を用いて，

$$\left(e^{\log x}\right)' = e^{\log x} \times \frac{1}{x} \quad (= 1)$$

も正解にした。