Theorem 4.4 [Weierstrass の定理] $C \subset \mathbb{R}^2$ を非空なコンパクト集合とする。f を C 上で定義される連続関数とする。f は最大値を持つ。

［証明］(Step 1) 実数の集合 $\{ f(x) \mid x \in C \}$ が上に有界であることを示す。
$\{ f(x) \mid x \in C \}$ が上に有界でないとする。n を任意の自然数とすると，n が上界でないから，ある $x^n \in C$ が存在して，

$$f(x^n) > n$$

を満たす。n は任意であるから，$x^n, n = 1, 2, \ldots$ の点列が C の中に取れる。C はコンパクトであるから，収束する部分列 $x^{n_i}, i = 1, 2, \ldots$ をとることができる。この部分列の極限を x^* とする。C は閉集合であるから，$x^* \in C$ である。一方，

$$f(x^{n_i}) > n_i,\ i = 1, 2, \ldots$$

である。f は連続であるから，左辺は $f(x^*)$ に収束する。ところが，右辺は無限大に発散する。これは矛盾である。

(Step 2) f に最大値が存在する。
Step 1 より，$V = \{ f(x) \mid x \in C \}$ は上に有界であるから，上界の集合 U は非空である。ある $x \in C$ について，$u \geqq f(x)$ であるから，U は下に有界である。第 1 章での議論から，組 (U, U^c) は実数の切断である。よって u^* が存在して，U の最小値となるか，U^c の最大値になるかのどちらか一方である。もし，u^* が U^c に属すれば，u^* は V の上界でないから，$f(c) > u^*$ となる $c \in C$ が存在する。これは，u^* が U^c の最大値であることに矛盾する。よって，u^* は U の最小値である。

いま，n を任意の自然数とすると，$u^* - 1/n$ は V の上界ではない。よって，ある $x^n \in C$ が存在して，

$$u^* \geqq f(x^n) > u^* - 1/n$$

である。n は任意の自然数であるから，上の関係を満たす点列 $x^n, n = 1, 2, \ldots$ が得られる。C はコンパクトであるから，収束する部分列が存在する。それを $x^{n_i}, i = 1, 2, \ldots$ とし，極限を x^* とする。ここで，

$$u^* \geqq f(x^{n_i}) > u^* - 1/n_i, i = 1, 2, \ldots$$

に着目し，$x^{n_i} \to x^*$ as $i \to \infty$ であることと，f の連続性を考慮すれば，$f(x^*) = u^*$ である。これは，u^* が f の最大値であることを意味する。∎