練習問題 (7 月 12 日)

問題 10 (p.201: 定理 6.4) 次の問に答えなさい.

(1) 定理 6.4 の内容を図を用いて説明しなさい.

(2) 効用関数 $u(x_1, x_2)$ は定義域 $\mathbb{R}^2_+$ において連続で，$\mathbb{R}^2_{++}$ において連続微分可能であるとする．さらに，p_1, p_2, I はいずれも正値と仮定する．次の最大化問題に解があることを論証しなさい.

$$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+} u(x_1, x_2) \quad \text{subject to} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leqq I \tag{m}$$

(3) (2) の仮定に加えて，効用関数が準凹関数であり，$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \in \mathbb{R}^2_{++}$, $\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda} > 0)$ が

$$\begin{cases} I - p_1\tilde{x}_1 - p_2\tilde{x}_2 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{\lambda}p_1 = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) - \tilde{\lambda}p_2 = 0 \end{cases}$$

を満たすとする．このとき，$(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ は効用最大化問題 (m) の解であることを，定理 6.4 を用いて，示しなさい.

問題 11 (p.202: 効用最大化の必要十分条件) 家計の効用関数を $u(x_1, x_2) = (\alpha x_1)^\beta (x_2)^\gamma$ とする．ただし，$\alpha,\ \beta,\ \gamma > 0, \beta + \gamma \leqq 1$ で，x_i は第 i 財の消費量である，$i = 1, 2$．彼女は

$$\max_{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2_+} u(x_1, x_2) \quad \text{subject to} \quad p_1x_1 + p_2x_2 \leqq I \tag{M}$$

という行動をとるとする．ここで，p_i は第 i 財の価格，$i = 1, 2$，I は所得ですべて正値とする．次の問いに答えなさい.

(1) 効用最大化問題 (M) に解があることを確かめなさい.

(2) 効用最大化問題 (M) の解は定義域の境界にないことを示しなさい.

(3) ラグランジュの必要条件を x_1, x_2 について解きなさい.

(4) (3) で解いたものが効用最大化問題 (M) の解であることを論証しなさい.

(5) 効用最大化問題 (M) の解を α の関数とみて,

$$\frac{\partial x_i}{\partial \alpha},\ i = 1, 2$$

の符号を求めなさい.

(6) (5) で得られたものの経済学的な意味を述べなさい.

問題 12 (p.202: 効用最大化の必要十分条件) 消費財は 2 種類あるとして，ある消費者の効用最大化問題を考える．この消費者の効用関数は $u(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ である．各財の価格，および消費財の所得はすべて 1 とする．このとき，効用最大化問題の 1 階の条件を満たす x_1, x_2 は効用を最大にしているか答えなさい.