

ミク口分析 (1), (2)

大阪市立大学・経済学研究科

prepared by

入谷 純

講義参加者：岡部，桐本，嶋，弘田

2007 年度 前期 木曜 3, 4 限

はじめに

2007 年度前期に大阪市立大学での大学院科目ミクロ分析 (1) と (2) を担当した。これはその講義内容をまとめたものである。この講義ノートは、2003 年度に神戸大学の大学院科目ミクロ経済学 I を講義したときに作成したものに、タイプミスをとると共に加筆をしたものである。特に、第 1 章全体と第 5 章のかなりの部分が今回追加された。第 1 章は近頃の経済学の教科書には書かれなくなった、経済学の出発点となる諸概念を解説したものである。この部分は、Hicks, J.R., *Value and Capital*, 2nd edition, Oxford Clarendon Press, 1946 や Debreu, G., *Theory of Value*, New Haven and London, Yale University Press, 1959 そして、森嶋通夫先生等のさまざまな著作に書かれているものを筆者なりにまとめたものである。

講義への参加者は 50 音順で、岡部君、桐本君、嶋君、弘田君、であった。木曜日の 13 時から 16 時過ぎまでの連続でしかも難解な講義に倦まずに参加してくれた彼らに敬意を表したい。講義は、当初、大部な内容を話す計画であったが、その半分程度のものしか提供できなかった。さらに、ゲーム論にかんする講義内容がほとんど予定されなかったことを申し上げねばならない。ゲーム論に止まらず、ミクロ経済学の研究にはさまざまな講義を補完的に聴く必要があることを付言しておきたい。

諸君の経済学研究に実り多きを祈る。

2007 年 7 月 19 日

入谷純

目次

| | | |
|--------------|-----------------------------------|-----------|
| 第 1 章 | ミクロ経済学事始め | 1 |
| 1.1 | 経済主体 | 3 |
| 1.2 | 時間, 需要, 供給 | 4 |
| 1.3 | 財, 生産, 単位地域 | 5 |
| 1.4 | 私的所有経済と経済主体 | 6 |
| 1.5 | 市場, 呼び値, 出来値, 一時的均衡, 動学 | 9 |
| 1.6 | 概観 | 10 |
| 1.6.1 | 企業 | 10 |
| 1.6.2 | 家計 | 12 |
| 1.6.3 | 市場均衡 | 13 |
| 1.6.4 | ワルラス法則と同次性 | 14 |
| 第 2 章 | 消費者の選択問題 | 19 |
| 2.1 | 効用の最大化 | 19 |
| 2.1.1 | 余暇, 労働そして貯蓄 | 20 |
| 2.1.2 | 解の存在 | 23 |
| 2.1.3 | 選好の凸性 | 24 |
| 2.2 | 選好関係 | 26 |
| 2.3 | 数学付録 | 28 |
| 第 3 章 | 需要の諸性質 | 31 |
| 3.1 | 限界効用均等則 | 31 |
| 3.2 | ラグランジュの必要条件 | 34 |
| 3.3 | 十分条件 | 39 |

| | | |
|--------------|---------------------|-----------|
| 3.4 | 代替効果と所得効果 | 41 |
| 3.5 | 連関性 | 50 |
| 3.6 | 数学付録 | 59 |
| 第 4 章 | 凸解析による接近 | 65 |
| 4.1 | 準凹性 | 65 |
| 4.2 | 準凹関数の必要条件と十分条件 | 69 |
| 4.3 | 支出関数 | 76 |
| 第 5 章 | 交換の一般均衡 | 83 |
| 5.1 | 問題の設定 | 83 |
| 5.2 | 競争均衡の存在 | 86 |
| 5.2.1 | 解決すべき課題 | 86 |
| 5.3 | 存在証明 | 88 |
| 5.4 | 均衡存在と不動点定理 | 90 |
| 5.5 | パレート効率性 | 94 |
| 5.6 | 粗代替経済 | 96 |
| 5.6.1 | 均衡の一意性 | 97 |
| 5.6.2 | 安定性 | 97 |
| 5.7 | 数学付録 | 99 |
| 5.7.1 | 凸コンパクト集合間の位相同型写像 | 99 |
| 5.7.2 | Lyapounov's Theorem | 105 |
| 5.7.3 | ベルジュの最大値定理 | 107 |

第1章 ミクロ経済学事始め

経済学で用いる用語は日常でも用いるものが多い。そのため、混乱が生じることが少なからずある。諸君の経済学をうまくスタートさせるために、多少込み入った話になるが、共通の基盤を準備しておきたい。

そのために、何を準備しなければならいかを初等的な図を用いて考察しよう。初級の経済学の教科書において、需要曲線と供給曲線は次の図にあるように描かれる。

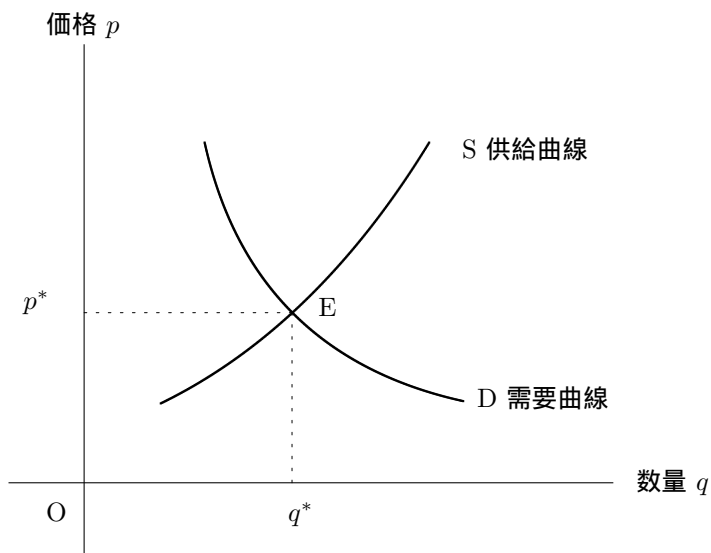


図 1.1: 需要曲線と供給曲線

この図にある右下がりの需要曲線は価格が高いときには購入したい量は

小さくなり、低いと大きくなるという性質を持つとされている。右上がりの供給曲線も、価格が高いときには販売したい量は大きく、低くなれば小さくなるということを示している。これらはともに“自然なことである”ように感じられるであろう。

仮に取引が成立するならば、つまり、取引がなされた後では、そこでは販売量と購入量は常に一致しなければならない。ある業者 A が 100 t の鉄を業者 B に販売したときに、購入した B が 78 t だけしか手に入らなかったということとはあり得ないからである。したがって、取引の後、つまり、事後的 *ex post* には、取引における販売と購入量は常に一致する。これは、簿記における借方と貸方の一致に他ならない。一方、図にあるように、需要や供給曲線のどの点でも販売量と購入量が常に一致するとは限らない。これらは、取引前の、つまり、計画が立案されてる時点の計画量だと考えられる。すなわち、この段階では、その中のどの価格でどれだけの数量が取引されるかは明らかではないのである。取引の前という意味で、これらは事前 *ex ante* の計画量であることになる。

ここで、需要曲線と供給曲線の交差する点 E に着目すれば、過不足のない状態であると同時に、事前的なものの中でただ一つ事後的な性質（販売量と購入量の一致）を有するものである。市場における値動き（不足すれば価格は上昇し、余れば下落する）に導かれて、E 点の価格と数量の取引にいたるというストーリーを考えるわけである。つまり、さまざまな事前的な計画量の中で、E 点の価格と数量で売買契約がなされると想定するわけである。このように考えるのが均衡理論である。

このように経済を理解することのメリットは極めて大きい。まず、需要曲線、供給曲線は価格の関数であるから、取引価格が「需要 = 供給」の解として導出されることになる。これは、価格がシステムの中で、方程式の解として、生成されることを意味している。経済学の極めて重要な問題として「価格とは何か」という問がある。均衡理論のこれに対する解答「需要 = 供給」は、外から理由なしに価格を導入することなく、価格を内生化したことに大きな意味がある。

このようにして、経済学における基本的なタームは需要と供給となる。需要と供給、そしてそれらの一致が意味するものを説明することがミクロ

経済学の主要なテーマである。

これらの議論を矛盾なく進展させ、また、経済学をプラクティカルなものするために次の問題が明瞭にされる必要がある。まず、需要と供給を定義する必要がある。図 1 では、需要と供給を前提として議論しており、それらは定義されていないのである。それに付随して準備しなければならないことがある。需要と供給が購入と販売にそれぞれ対応しているのであるから、それらを行う主体を明確にしておく必要がある。より基礎的に、販売や購入の対象である財とは何であるかを知っておかねばならない。さらに、「需要 = 供給は事前的な契約である」という理解からは、それがどのような時間的視野を前提としているのかを明らかにしなければならない。契約が時間にかんする記述なしになされることは考えられないからである。

1.1 経済主体

これまでに説明したように、ミクロ経済学は需要と供給によって経済を記述する。需要は家計の行動から、供給は企業の行動から説明される。多くの場合、家計と企業は経済を構成する最小の主体として想定される。家計は消費者あるいは個人とも呼ばれ、企業は生産者とも呼ばれる。これら以外に、政府を経済主体として登場させる場合もある。これらの主体の経済行動を通じて経済の総体が記述される。

家計（個人）は価値判断の基準をもつ、すなわち、財・サービスへの嗜好（好き嫌い）を有するとする。家計の嗜好は効用あるいは選好という用語で次の章で表現される。個人に価値判断の基準があるという考え方は、個人主義という思想にその源を見ることができる。経済学が誕生してくる時点が、歴史的に、個人主義や功利主義という社会思想の発展と呼応していたからである。あるいは、そのような歴史的な解釈を離れて、形式的な立場もあり得よう。すなわち、「家計が財・サービスへの嗜好を有するとする」という前提がもたらす結果の説明力が大きいのであるから、これを採用しているのだ」という立場である。

企業には、二つの理解の仕方がある。一つは企業がその所有者の組合に他

ならない，法人擬制説という立場である。あるいは，企業は独自に意志決定のできる存在であるという理解，法人実在説もある。経済学は多くの場合，法人擬制説という立場に立って議論をする¹。

企業を個人主義の立場から理解するとするならば，それは持ち主の組合であるという法人擬制説を是とすることになる。このような場合，企業の目的はその所有者の便益を最も高めることと想定するのが自然であろう。したがって，利潤の最大化が企業の目的として採用されることになる。さらに，企業には生産技術があらかじめ与えられているとすると，技術的な制約の下に最も大きな利潤を獲得することが企業の目標となる。

1.2 時間，需要，供給

ある時間的長さを決めておく。通常1年，半期，四半期のような物理的時間を想定する。それを一期間とするのが通常である。いま，経済主体（家計あるいは企業）がある期間の期初に立って，当該期間の購入計画を立てるとする。その購入計画を需要という。また，販売計画を立てる場合には，それを供給と呼ぶ。

実際には，経済主体が想定する期間はそれぞれ異なるので，「期間」をある特定の物理的時間と特定できるか否かには，いま少しの考察が必要である。森嶋（1960）では，様々な経済主体の計画期間のなかの最大公約的な期間を取ってそれを1期間とするというプランが示されている²。例えば，3人の経済主体が，それぞれ，半年，1年，1年半を1計画期間としている場合には，半年を共通の「1期間」として採用するということである。そして，1年半を計画期間としている経済主体は，「3期間」にわたって計画を立案し，最初の第1期間の取引については中間生産物の取引を計画すると考えることになる。このようにすれば，各経済主体の時間を一致させ，共通の時間枠で議論をすることが可能となる。

¹ケインズ経済学では，投資の主体は企業であり，家計ではない。これはケインズ経済学は必ずしも法人擬制説を採っていないことを示唆している。

²森嶋通夫「均衡成長の多部門理論」，森嶋・篠原・内田 編『新しい経済分析』1960年，東京，創文社，所収 3-60。久我清「一般均衡理論の時間構造」，久我・入谷・永谷・浦井 著『一般均衡理論の新展開』（東京，多賀出版）第2章，1998年，19-49。

このようにして決まる一期間を越えて存在するものがある。例えば、建物、工場、設備等である。これらをストックという。これに対して、1 期間内に新たに付け加わったり、利用可能になるものをフローという。貯蓄とはフローの中で、資産の増加分（金融資産と物的資産のその期間内の増加分）となるものをいう。投資とはフローで物的資産の当該期間内の増加分をいう。

1.3 財, 生産, 単位地域

次に、財とは何かについて考察する。財とは、直接間接に経済の構成員が何らかの理由で必要とする物的・非物的な対象である。「直接に必要とするもの」とは、彼が消費者であれば、米とかパンのように直接的に欲求を満たすものを意味する。「間接に必要とするもの」とは、彼が消費者であれば、原油のように、直接は必要としないが、米とかパンを食用にするために必要とするものを意味する。また、非物質的な対象とは、サービスのよう具体的に物質的な形をもたないが、彼が必要とするものである。また、消費は家計によってなされ、消費とは財やサービスが当該の期間中に形を変えてしまう、あるいは、なくなってしまうことによって、家計に便益をもたらすことをいう。

さらに、財には物理的・化学的性質、時間、場所によって異なるという性質がある。財が物理的・化学的性質によって異なることには異論はないであろう。それだけでなく、時間が異なる、すなわち、今期と来期あるいは現在と将来の財は異なる財と取り扱われる。実際、先物市場（将来の財を取引する市場）では現在の財と異なる価格が付けられている。また現在の財を将来に利用するために保蔵することは、現在の財から将来の財を作るという生産に他ならない。このように、物理的・化学的性質が同じでも時間が異なれば異なる財という扱いをする。ここで、生産という用語が出てきたが、生産とは、それがなければ利用可能でなかったものを利用可能にする行為なのである。

また、単位地域 elementary region という考え方がある³。その中では一物一価が成立するような地理的広がり単位地域である。すなわち、単位地域内では一つの市場が成立している。単位地域を越えると、例え物理的・化学的特性が同じでも異なる財である。例えば、高野山の山頂でのオレンジジュースと南海難波駅の前でのオレンジジュースは異なる財となる。これは「オレンジジュースの輸送」によって、高野山の山頂でのオレンジジュースが生産されたのである。すなわち輸送も生産行為であると理解できる。いくつかの単位地域が集まった場合を考察するものが地域経済論や地方財政論、あるいは、国際経済学という分野になる。

財そのものは経済学の考察対象ではない。可能なあらゆる財を有限個の自然数 ℓ と仮定して、 x_k を第 k 財の量とすれば、 $(x_1, x_2, \dots, x_\ell)$ はいろいろな財の量をまとめて表している。これは ℓ 次元空間上の点によってさまざまな財の組み合わせが表現できることになる。

1.4 私的所有経済と経済主体

いま、ある期間の期初に家計と企業がその期間の消費計画と生産計画とを立案しているとしてみよう。期初には、ストックをはじめに様々な財があらかじめ存在している。現実には、それらは家計や企業に保有されている。第1章第1節で考察したように、企業の保有する諸設備やストックが最終的にその所有者である家計に帰すると考えるならば、期初に存在するさまざまな財も家計が所有していると考えることができる。このような財だけにとどまらず、企業も家計の所有の下にある経済を私的所有経済 private ownership economy と呼ぶ。ミクロ経済学において私的所有経済は標準的な設定である。

諸財の量はベクトルとして ℓ 次元の点として表現できる。これを利用して期初にいろいろな財が家計に保有されている、それを初期保有 initial holding $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_\ell)$ によって表現する。特に i 番目の家計に保有されるものを $\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_\ell^i)$ と書き表す。これらは家計がこの期間に処分

³G. Debreu *Theory of Value*, 1959, New York, Wiley の Chapter 2 を参照せよ。

可能なものである。これに加えて、企業もいろいろな個人によって所有されるのであるから、第 j 企業の利潤 π^j の一部は第 i 家計に帰することになる。かりに、この家計が企業 j を θ_i^j , ($0 \leq \theta_i^j \leq 1$) だけ所有していたとするならば、 $\theta_i^j \pi^j$ だけの所得（配当所得）が得られることになる。諸財の価格を p_1, p_2, \dots, p_ℓ とし、企業の本数を m とすれば、期初に個人 i の利用可能な資金は

$$I^i = p_1 \omega_1^i + \dots + p_\ell \omega_\ell^i + \theta_i^1 \pi^1 + \dots + \theta_i^m \pi^m$$

となる。家計はこの利用可能な資金から彼の今期の消費を決めることができる。ミクロ経済学では、上のように定義された I^i を第 i 家計の所得と呼ぶことが多く、本講義においてもこの呼称を採用する。しかし、これは経済学における通常の所得概念とは異なることに注意をしなければならない。なぜなら、 ω^i のあるものはストックであり、例えば現在住んでいる持ち家が入っている、それらを販売して得られるもの、つまり、ストックの価値も I^i の中には入っているからである。一方、通常の所得概念はフローの範疇に入るもので、ストックの価値を含むものではないのである。

所得とは何か。

以上を見れば「所得とは何だろう」という疑問が生じるであろう。ヒックスによれば所得は極めて混乱した概念で、簡易バージョンから極めて厳密なものまでさまざまにある⁴。標準的で初歩的な所得の定義をあげておけば、次のようなものである。ある家計の所得とは、

彼女または彼の期首と期末の資産の価値額を同一にして消費できる最大の金額

であると定義される。これは通常言われるサイモンズの包括的所得（=消費 + 貯蓄）comprehensive income と一致しているが⁵、サイモンズの包括的所得は事後の概念であることが多い。経済学で用いる「所得」は、多くの場合、事前の概念であることに注意をすることが必要である。すなわち、需要

⁴J.R.Hicks (1946), *Theory of Value*, 2nd edition, Oxford, Clarendon Press の第 1 章 所得 を参照されたい。

⁵H. Simons (1937), *Personal Income Taxation*, University Chicago Press, Chicago 参照。

を決める要因としての所得は期首の時点ではまだ確定しておらず、ある価格の場合はこの額の所得であり、また別の価格が成立するならば異なる所得になる。

事前においても事後においても、所得が負の値になりうることに注意しなければならない。仮に、賃金所得の予定が 500 万円であり、利子配当所得を 100 万円得られ、資産が期首に 2000 万円期末に 1000 万円となると予想され、またこれ以上の収入がない場合には、事前の所得は -400 万円となる。これらの予想や予定が実現すれば、事後の所得も -400 万円となる。このような場合にも資産を取り崩して、消費をすることができる。この意味では、資産を考慮して購入計画を立てなければならない。つまり、厳密な意味では、需要が依存すべきなのは所得ではなく、資産と所得の合計額だということになる。

効用 utility

第 i 家計の購入計画、すなわち、需要は、彼が ℓ 次元の点を選ぶことを前提にしている。その時に前提されるものが彼の嗜好（好き嫌い）である。その嗜好をある関数、 $u^i(\cdot)$ であらわす。これを効用関数と呼ぶ。ある消費可能な組 (x_1^i, \dots, x_ℓ^i) が他の消費可能な組 $(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_\ell^i)$ に比べて、厳密に望ましいと感じるとき、

$$u^i(x_1^i, \dots, x_\ell^i) > u^i(\bar{x}_1^i, \dots, \bar{x}_\ell^i)$$

と表現できるものである。上で“厳密に”という言葉を用いたが、これは「等号が入っていないこと」で表されている。効用関数の変数には、他の家計 i' のある財の消費 $x_k^{i'}$ が入っていないことに注意をすべきである。彼の消費の望ましさ、効用、あるいは、満足は彼の消費だけから生じ、他のものに影響されないという表現がなされている。これは個人主義的な立場に他ならない。

家計は彼の利用可能な所得 I^i と効用関数 $u^i(\cdot)$ から購入計画を決めるのである。

生産技術

一方、企業には生産技術が与えられていると想定する。生産技術は産出物

を y 生産要素を z と書いて, $y = f(z)$ のように書くことができる。 f を生産関数と呼ぶ。生産技術は経済を考察するときの与件である。生産可能な y は $y \leq f(z)$ と表現できる。あるいは集合を用いて $\{(y, z) | y \leq f(z)\}$ のように表現できよう。個人主義的な社会観の下では, 企業は個人の所有するものであるから, その目的は所有者の便益を図ることと考えられ, それは利潤最大化で表現されよう。すなわち, 生産可能なもののなかで, 最も利潤を最大にするものを生産し販売することを計画するわけである。

以上のようにして,

需要は主に家計の消費計画から, 他方, 供給は主に企業の生産計画から説明される

ことになる。

1.5 市場, 呼び値, 出来値, 一時的均衡, 動学

経済学の教科書では, 図 1 に解説したような, 縦軸に価格をとり横軸に数量をとる需要曲線と供給曲線がよく描かれる。これらの二つの曲線が交わるところで, 財の販売価格と販売量が決まるという考え方が解説される。しかし, この考え方にたつて, 需要曲線や供給曲線を描くには「この価格の場合にはこれだけ欲しいとか売りたい」といったことの前提となる価格が必要である。これでは価格が価格を決めるというようなある種の靴ひも理論 (bootstrap theory) に陥っているように見える⁶。経済学では, 次のような事態を想定している。つまり, 商品市場のあるものに存在する取引の形態であるが, 市場においてまず生成される価格は呼び値 false price とよばれるものである。その呼び値のもとで出された売り注文と買い注文が合致しなければ, それらの注文を無効として, 新たな呼び値が叫ばれる (再契約が可能である)。このような手続きを, 買い注文と売り注文が一致するまで繰り返す。そのようにして得られる価格を出来値として確定し, 売買契約を決定する。このようにして確定される価格 (出来値) と販売量が需要と供給の一致で想定されているものである。

⁶靴のひもを引っ張って身体を空中に持ち上げることができるという理論。

ミクロ経済学は、経済の通時的な側面を考慮しないように感じる読者もいるかもしれない。様々なミクロ経済学の教科書で取り扱われる材料を見ればそう思うのも無理はない。しかし、必ずしもそれは正しくない。つまり、ある期間の需要と供給の一致（一時的均衡）でその期間の経済が決まる、この限りでは議論は一時点に限った静学的 static な理論に見える。しかし、その一時均衡では、当該の期間中で貯蓄と投資の決定がなされる。この背後には、資本市場や金融市場があって利子率が価格として投資と貯蓄の決定に役割を果たしているのである。これは資本蓄積の過程が、従って動学の最も重要な装置が、一時均衡の中で決められることを意味する。このようにして、次期の生産能力が新たに決まり、次期の一時均衡につながっていく。すなわち、経済の通時的変動は一時均衡の時間的なシリーズとして把握される。これが動学 dynamics の基本的な考え方である。

1.6 概観

これまで、私的所有に基づく市場経済のためのいろいろな枠組みを準備してきた。それらの枠組みを用いて、ミクロ経済学が描きたい標準的なものの全体を鳥瞰しておきたい。家計は n 人、企業は m だけ、財は ℓ 種類存在するものとする。

今、ある期の期初にあって、経済主体がその期間中にどのような経済活動をするかを考察しているとしよう。市場では価格（呼び値） $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ が生成されており、それに応じて各経済主体が需要や供給を決定していく。この決定を企業、家計の順で説明する。その後、得られたものが有する性質について考察し、最後に、経済においてバランスの取れた状態、つまり、均衡について定義を与えよう。

1.6.1 企業

これまでの順序を変えて、企業から始めよう。企業は生産技術を持っているものとし、その生産技術を生産可能集合 $Y^j (\subset \mathbb{R}^\ell)$ によって表現する。

$y^j \in Y^j$ であれば, $y^j = (y_1^j, \dots, y_\ell^j)$ は生産可能

であることを表している。さらに,

$y_k^j < 0$ であれば, 第 k 財はインプット (生産要素),

$y_k^j > 0$ であれば, 第 k 財はアウトプット (生産物)

と考える。負の数を用いると, 表現が大変簡便になる。すなわち, $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ を価格とすると, $y^j \in Y^j$ を選択することの利潤 π^j は,

$$\pi^j = py^j = p_1 y_1^j + \dots + p_\ell y_\ell^j$$

と表現できて, 和で表現できる。もし産出物も投入要素も共に正の数で表現しようとするれば, どれがインプットであるかを明示して「売上予定額マイナス要素購入予定額」となるように表現しなければならない。これを考えると, マイナスのインプットというのは便利な記法である。

市場で価格 $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ が与えられたときに, 企業は

$$\max_{y^j} py^j \quad \text{subject to } y^j \in Y^j \quad (1.1)$$

という行動をすると想定する。ここで, “max A subject to B” は A を B という制約に従って最大化しなさいという記号法である。さらに max の下についている y^j は最大化のための変数を表している。

この利潤最大化問題から価格 (呼び値) p が与えられるごとに解 y^{j*} を得ることができる。このように, p に応じて解 y^{j*} が決まるので, 解を関数として書き表して,

$$y^j(p) = (y_1^j(p), \dots, y_\ell^j(p))$$

と書く。もし $y_k^j(p) > 0$ であるならば, 第 k 財は第 j 企業の生産物であり, 関数 $y_k^j(p)$ は供給関数である。また, $y_k^j(p) < 0$ であるならば, 第 k 財は第 j 企業の生産要素であり, 関数 $-y_k^j(p)$ は要素需要関数となる。

さらに, 第 j 企業の利潤を π^j で表現する。利潤が価格に依存していることを明示したいときには, $\pi^j(p)$ と書く。これは利潤関数である。

上で説明された企業の行動はあらゆる企業 $j = 1, 2, \dots, m$ に関して想定される。

1.6.2 家計

次に家計の行動の説明に移ろう。第 i 家計の第 k 財の消費量を x_k^i で表す。彼の諸財の消費の組み合わせ、あるいは、消費ベクトル

$$x^i = (x_1^i, \dots, x_\ell^i) \in \mathbb{R}_+^\ell$$

にたいして、家計は効用関数 u^i を持っているものと想定する。すなわち、 $u^i(x^i) > u^i(\bar{x}^i)$ であれば、彼は x^i の消費の組み合わせを \bar{x}^i よりも好むことを示している。関数 u^i が心理的な嗜好あるいは選好を数値的に表現しているのである。家計の行動は、

$$\max_{x^i \in \mathbb{R}_+^\ell} u^i(x^i) \quad \text{subject to } px^i \leq I^i, \quad (1.2)$$

と表現される。(1.2) の最初の制約条件 $px^i \leq I^i$ は予算制約 budget constraint と呼ばれる。通常、第2の制約条件 $x^i \in \mathbb{R}_+^\ell$ は家計の最大化行動には明示されない。この問題は価格と所得の組 $(p, I^i) = (p_1, \dots, p_\ell, I^i)$ が与えられる毎に解を与えるので、それを関数として表現し、

$$x^i(p, I^i) = (x_1^i(p, I^i), \dots, x_\ell^i(p, I^i))$$

と書く。 $x_k^i(p, I^i)$ は第 i 家計の第 k 財への需要である。

ここで、所得 I^i は次のようなものであると想定されている。いま、私的所有経済を想定しているので、経済の資源は全て個人に帰属するものと想定される。家計 i の資源の保有をベクトル $\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_\ell^i) \in \mathbb{R}_+^\ell$, $\omega^i \neq 0$ で表す。初期に保有されている資源の総量は

$$\sum_{i=1}^n \omega^i = \left(\sum_{i=1}^n \omega_1^i, \dots, \sum_{i=1}^n \omega_\ell^i \right)$$

で表される。 ω^i を販売する（資産であれば貸し付ける）ことによって、家計は所得を得ることができる。さらに、企業も最終的には家計のあるグループによって所有されていると想定して、第 j 企業の利潤 $\pi^j(p)$ のある部分

が家計 i に帰属すると考える。その利潤率を θ_i^j と書く。

$$0 \leq \theta_i^j \leq 1, i = 1, 2, \dots, n \quad \text{かつ} \quad \sum_{i=1}^n \theta_i^j = 1$$

という性質を要求しておく。利潤の分配率は一定であると想定する。以上のようにして、所得は、

$$I^i = p\omega^i + \sum_{j=1}^m \theta_i^j \pi^j(p), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

のように与えられる。これを見ると、所得は p の関数であるので、 $I^i(p)$ と書くことができる。その結果、需要関数を $x_k^i(p, I^i(p))$ と書くことができる。需要関数は、結局価格の関数と見ることができるので、所得への依存を省略して、 $x_k^i(p)$ と書かれることが多い。これは合成関数による表記である。

1.6.3 市場均衡

以上によって、需要と供給がすべて定義された。市場均衡は、

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n x_1^i(p) = \sum_{j=1}^m y_1^j(p) + \sum_{i=1}^n \omega_1^i \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum_{i=1}^n x_\ell^i(p) = \sum_{j=1}^m y_\ell^j(p) + \sum_{i=1}^n \omega_\ell^i \end{cases} \quad (1.3)$$

によって表現される。左辺が総需要、右辺が総供給である。

この ℓ 本の等式は「価格 p を未知数とする連立方程式」である。この等式を成立させる特別の価格 p^* を均衡価格 equilibrium price という。均衡価格の下での消費と生産を $x^{i*} = x^i(p^*), i = 1, \dots, n, y^{j*} = y^j(p^*)$ と書くと、

$$(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^{1*}, \dots, y^{m*})$$

を均衡配分 equilibrium allocation と呼ぶ。

以上の議論を定義の形にまとめておこう。

定義 1.1 次の性質 (a), (b), (c) を満たす価格と配分の組 $(p^*, (x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^{1*}, \dots, y^{m*}))$ を競争均衡 competitive equilibrium と呼ぶ。

(a) y^{j*} は次の問題：

$$\pi^* = \max_{y^j} p y^j \text{ subject to } y^j \in Y^j$$

の解である, $j = 1, 2, \dots, m$ 。

(b) x^{i*} は次の問題：

$$\max_{x^i} u^i(x^i) \text{ subject to } p^* x^i \leq p^* \omega^i + \sum_{j=1}^m \theta_i^j \pi^{j*}, x^i \in \mathbb{R}_+^\ell$$

の解である。

(c) 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^{1*}, \dots, y^{m*})$ は

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n x_1^{i*} &= \sum_{j=1}^m y_1^{j*} + \sum_{i=1}^n \omega_1^i \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ \sum_{i=1}^n x_\ell^{i*} &= \sum_{j=1}^m y_\ell^{j*} + \sum_{i=1}^n \omega_\ell^i \end{aligned}$$

を満たす。

1.6.4 ワルラス法則と同次性

上で解説したのはミクロ的均衡理論のスケルトンであるが, 以上の準備だけからでもいくつかのことを確立することができる。

まず, 需要関数 $x_k^i(p)$ と供給関数 $y_k^j(p)$, $k = 1, 2, \dots, \ell$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ について, 第 k 財の超過需要 $E_k(p)$ を

$$E_k(p) = \sum_{i=1}^n x_k^i(p) - \sum_{j=1}^m y_k^j(p) - \sum_{i=1}^n \omega_k^i(p), \quad k = 1, 2, \dots, \ell$$

のように定義する。ここで, 超過需要の価値額の総和を計算すると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} p_k E_k(p) &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k \left(\sum_{i=1}^n x_k^i(p) - \sum_{j=1}^m y_k^j(p) - \sum_{i=1}^n \omega_k^i(p) \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^i(p) - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{\ell} p_k y_k^j(p) - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{\ell} p_k \omega_k^i(p) \\ &\leq \sum_{i=1}^n \left(p\omega^i + \sum_{j=1}^m \theta_j^i \pi^j(p) \right) - \sum_{j=1}^m \pi^j(p) - \sum_{i=1}^n p\omega^i \\ &\quad : (1.2) \text{ の予算制約と定義より} \\ &= 0 \quad : \sum_{i=1}^n \theta_j^i = 1 \text{ であるから} \end{aligned}$$

となる。 $p x^i(p) < I^i(p)$ となる家計が存在するなら厳密な不等号が成立し, あらゆる家計が等号で予算制約を持たずならワルラス法則は等号で成立することに注意せよ。

ワルラス法則がもたらすもの: ワルラス法則の意味を考察するために, ワルラス法則が等号で成立すると考えてみよう。ここで, 需要と供給のバランスは,

$$E_1(p) = 0, E_2(p) = 0, \dots, E_{\ell}(p) = 0 \quad (1.4)$$

である。これは ℓ 個の価格 p_1, \dots, p_{ℓ} が未知数で方程式が ℓ 本の連立方程式である。ワルラス法則は $p_1 E_1(p) + \dots + p_{\ell} E_{\ell}(p) = 0$ と表現できる。仮に, ある価格 $\hat{p} = (\hat{p}_1, \dots, \hat{p}_{\ell})$ について, \hat{p}_{ℓ} を正値とし, 市場均衡を意識すると,

$$E_1(\hat{p}) = 0, \dots, E_{\ell-1}(\hat{p}) = 0 \Rightarrow \hat{p}_{\ell} E_{\ell} = 0 \Rightarrow E_{\ell}(\hat{p}) = 0$$

がワルラス法則から導かれる。これは連立方程式, (1.4) の ℓ 本の方程式の中で, 一本は本質的に不必要であることを意味している。なぜなら, (1.4) は本質的には,

$$E_1(p) = 0, E_2(p) = 0, \dots, E_{\ell-1}(p) = 0 \quad (1.5)$$

によって語られることになるからである。すなわち,

連立方程式 (1.4) は $\ell - 1$ 本の数の方程式に ℓ 本の未知数 p_1, \dots, p_ℓ が存在する (1.5) となる

ということになる。通常であればこれは解くことのできない方程式である。すなわち, 需要と供給の一致からでは価格を決めることができない可能性を内包しているのである。

上の問題を解決しておこう。さもなければ, 需要と均衡で経済を記述しようとするに疑問を残したまま進むことになる。

いま, λ を正の定数として, 価格が $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ から $\lambda p = \lambda(p_1, \dots, p_\ell)$ に変化したとしてみよう。このとき, (1.1) を検討すれば, 企業の行動によって,

$$\begin{aligned} y_k^j(\lambda p) &= y_k^j(p), j = 1, 2, \dots, m, k = 1, 2, \dots, \ell \\ \pi^j(\lambda p) &= \lambda \pi^j(p), j = 1, 2, \dots, m \end{aligned}$$

が得られる。すなわち, $y_k^j(p)$ はゼロ次同次関数 homogenous of degree zero であり, $\pi^j(p)$ は一次同次関数である⁷。以上によって, (1.2) の制約条件の所得は,

$$\begin{aligned} I^i(\lambda p) &= \lambda p \omega^i + \sum_{j=1}^m \theta_i^j \pi^j(\lambda p), \\ &= \lambda p \omega^i + \lambda \sum_{j=1}^m \theta_i^j \pi^j(p) = \lambda I^i(p) \end{aligned}$$

⁷一般に, 関数 $f: \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ が q 次同次関数 homogenous of degree q であるとは, 任意の $\lambda > 0$ について,

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_\ell) = \lambda^q f(x_1, \dots, x_\ell)$$

が成立することである。

となる。したがって、

$$\{x^i \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \lambda p x \leq I^i(\lambda p)\} = \{x^i \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p x \leq I^i(p)\}$$

である。このようにして、(1.2) の解は、

$$\text{任意の } \lambda (> 0), k, i \text{ について } x_k^i(p) = x_k^i(\lambda p)$$

を満たさなければならない。すなわち、需要は価格に関してゼロ次同次である。一歩発想を進めて、 $\lambda = \sum_{k=1}^{\ell} p_k$ としてみると、需要関数と供給関数のゼロ次同次性から

$$x_k^i(p) = x_k^i(\lambda p) = x_k^i \left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^{\ell} p_k}, \dots, \frac{p_\ell}{\sum_{k=1}^{\ell} p_k} \right),$$

$$y_k^j(p) = y_k^j(\lambda p) = y_k^j \left(\frac{p_1}{\sum_{k=1}^{\ell} p_k}, \dots, \frac{p_\ell}{\sum_{k=1}^{\ell} p_k} \right),$$

が得られる。ワルラス法則とこれとを勘案すると、需要と供給のバランスは、

$$\begin{cases} E_i(p) = 0, & i = 1, 2, \dots, \ell - 1 \\ \sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

によって記述することができる。この方程式では、未知数と方程式の数が合っていることに、そして、ワルラス法則と需要と供給の価格にかんするゼロ次同次性が連携して問題を解決していることに注意すべきである。

以上によって、物語を進行させることにもはや障碍はないように見える。上の解決法によって失われたことがあること、言い換えれば、視野に入っていない問題があることを指摘してこの章を終えよう。もともとの需要と供給の一致 (1.3) や (1.4) は、もしこれらを解くことができれば、価格の絶対水準までもが決定されるはずのものであった。一方、(1.6) では、 $\sum_{k=1}^{\ell} p_k = 1$ の数字 1 は本質的でなく、 $\sum_{k=1}^{\ell} p_k = 2$ 、あるいは、 $\sum_{k=1}^{\ell} p_k = 100$ 、でもかまわないのである。これは (1.6) では物価水準の決定はできない、相対価格しか決まらないということである。

第2章 消費者の選択問題

2.1 効用の最大化

一般に、消費者の選択は次の問題によって

$$\max_{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell} u(x_1, \dots, x_\ell) \text{ subject to } p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_\ell x_\ell \leq I \quad (2.1)$$

のように表現される。ここで、 p_j は第 j 財の価格、 x_j は第 j 財の消費量、 I は消費者の所得、 u は効用関数、である。この章では、価格は全て正 $p_j > 0$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ と仮定する。この問題の解を x_j^* , $j = 1, 2, \dots, \ell$ と書けば、解は価格と所得からなるパラメータ $(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ によって決定される。その意味で、

$$(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I) \mapsto x_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

のように対応を考えることができる。これは解 x_j^* が $(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ の関数として表現できるということに他ならない。その関数を

$$x_j(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I), \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.2)$$

と書く。このなかの1つの関数 $x_1(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ の中の p_2, \dots, p_ℓ, I を一定とみなして、 p_1 だけの関数と考えてそのグラフを書けば、通常の需要曲線が描けることになる。

経済学の基本的な用具である需要 demand は最大化問題によって基礎付けられているのである。古典派の初期には需要が予め与えられているとして、つまり需要関数を出発点として経済学が組み立てられていたという。それに対して、現代の経済学では、効用関数と予算から最大化問題を通じ

て需要を基礎付ける議論がなされる。需要自身が経済現象であるという認識からはそれを説明しようとするスタンスは自然であろう¹。

考察すべき問題

上で与えた消費者の最大化問題 (2.1) によって需要を定義するとき、解決すべきいくつかの点が残されている。それらは、

- (i) 豊かな記述 問題 (2.1) は余暇や労働そして貯蓄といった経済学が必要とする豊かな内容を表現できているのか、
- (ii) 連続性 需要関数 $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I)$ は連続か、
- (iii) 解の存在 問題 (2.1) には解があるのか、
- (iv) 一意性 問題 (2.1) の解は一意か、
- (v) 必要条件 解はどのような性質も持っているか、

である。

(i) には 2.1.1 節において議論をする。(ii) には第 4 章の定理 4.3 において最終的な解答が与えられる。(iii) は 2.1.2 のテーマである。(iv) は本章の定理 2.3 で議論される。(v) は次章で取り扱う。

2.1.1 余暇，労働そして貯蓄

上の問題 (2.1) は極めて単純化されていて、これによって豊かな経済現象が描けるのかに疑問をもつかもされない。上の問題 (2.1) は様々なものに適応可能であることを示しておこう。最初に、労働や余暇の選択を (2.1) にどのように表現されるかから始めよう。いま、余暇の初期保有 initial holding,

¹近年, Sonnenshein (1972) “Market Demand Functions,” *Econometrica*. から始まる市場需要関数を基礎付ける分野がある。それはワルラス法則、連続性等の通常の性質を持つ関数があれば、それがどのようなものであっても、それを市場需要関数とするようなミクロの構造（家計、効用関数）が存在する（しかも多数）という議論である。大胆な解釈をするならば、むしろ経済を決定するもの（価格や配分を決めるもの）はミクロの構造ではなく、市場需要関数であるということになる。そのような意味で古典派が需要関数から経済学を構築したという視点が現在にも活き々とした経済理解を提供しているのである。このような議論の概観を知りたい人は、Shafer, W., and H. Sonnenshein (1982) “Market Demand and Excess Demand Functions,” in *HandBook of Mathematical Economics*, Vol.2 (eds.: Arrow and Intriligator), chapter 14. を参照されたい。

initial endowment があって一定値 H であるとする。これは、1日が24時間であるというような、物理的な制約であると考えればよい。すると、余暇 x_1 と労働 y_1 の間には、

$$\begin{array}{rcl} \text{余暇} & \text{労働} & \\ x_1 + & y_1 = & H \end{array}$$

の関係がある。ここでは、余暇を第1財と考えている。この制約を(2.1)に取り込む必要がある。つまり、

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_\ell x_\ell \leq p_1H + \bar{I}$$

とすれば、余暇の選択が表現される。右辺の \bar{I} は労働所得以外の所得である。この表現では、まずすべての余暇 H を売って(右辺 p_1H)、その後買い戻す(左辺 p_1x_1)ように書かれている。労働は余暇 x_1 が決まれば、 $H - x_1$ として決定されるということになる。

その他に、現実の雇用契約は x_1 を自由に選択できるように制度化されていないという点がある。このときは H を実際の雇用契約上の労働時間を差し引いた余暇の総量で、 $H - x_1$ を残業のように選択できる労働時間と考えるとよい。

次に貯蓄を(2.1)でどのように捉えるかであるが、表現の単純化のために1時点の財の数が1種類であるように考える。貯蓄とは資産の増加分と定義されるが、将来に支出するために現在の消費を少なくして将来に備えるという目的がある。そのためには、1時点だけではなく、複数の時点を含まねばならない。いま、2期間の問題として簡単化してみる。つまり、

$$\begin{array}{l} \text{第1期} \quad p_1x_1 + s = I^1 \\ \text{第2期} \quad p_2x_2 = I^2 + (1+r)s \end{array}$$

というような形となる。 I^1, I^2 はそれぞれ第1期、第2期の所得で、 s は貯蓄、 x_1, x_2 はそれぞれ第1期、第2期の消費である。さらに、 p_1, p_2, r はそれぞれ第1期、第2期の消費財の価格、そして利子率である。これを書き

直すと,

$$p_1x_1 + \frac{p_2}{1+r}x_2 = I^1 + \frac{I^2}{1+r}$$

とすることができる。これは問題 (2.1) の制約条件と同じ形をしている。従って、効用が第1期の消費と第2期の消費に依存すると想定すれば、貯蓄の選択も (2.1) の視野の中に入ってくる。

貯蓄を (2.1) で考察する時には、注意すべき点がある。それは、 p_2 と I^2 である。将来の価格や所得は貯蓄を選択する時点では知られていない可能性がある。将来財の市場 (先物市場, future market) があって価格が形成されているなら p_2 や I^2 を知ることができるかもしれない。現実には将来財の市場は限られていて、ほとんどの将来の消費財に関する市場は存在しない。その時には、 p_2 と I^2 は予想値である。消費者が1つの値だけを予想する場合には (2.1) によって貯蓄を考察できる。

しかし、将来の予想にはリスクの考慮を伴う。つまり、可能な価格の分布を予想するであろう。そのような場合、いろいろな可能性 (リスク) がある時の効用関数をどのように考えるべきか、という基本的な問題に戻らなければならない。そのような不確実性下の経済理論にも多くのテーマがある²。

²事象は確率的に生起するが、その様々な事象を予期しながら個人は選択をするのが通常である。不確実性下の経済における議論は、基礎理論、一時的均衡、保険等広い分野にわたっている。不確実性下において、効用をどのように捉えるべきかは、期待効用理論 expected utility theory の中心的課題である。その基本的な文献は

Savage, L. (1954) *The Foundations of Statistics*, Wiley.

Herstein, I.N., and J., Milnor (1953) "An Axiomatic Approach to measurable Utility," *Econometrica*.

であるが、議論の概観を得るには

Fishburn, P.C. (1982) *The Foundation of Expected Utility*, Reidel.

MasColllell, A., M.D. Whinston, and J.R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Chapter 6, Oxford Univesity Press.

がよい。さらに、一般均衡モデルの拡張として、

Radner, R. (1972) "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets," *Econometrica*.

を出発点とする非完備市場モデルがある。非完備市場モデルには

Magill, M. and M. Quinzii (1996) *Theory of Imcomplete Markets*, Vol.1, the MIT Press.

という優れた教科書がある。

2.1.2 解の存在

第 2.1 節で挙げた問題の内の「解の存在」問題を確認する。ここで、次の仮定をする。

仮定 2.1 効用関数 $u(x_1, \dots, x_\ell)$ は定義域を \mathbb{R}_+^ℓ 、値域を \mathbb{R} とする連続関数である。

さらに、次の定理に着目する。

定理 2.1 (ワイヤーシトラウスの定理) $X \subset \mathbb{R}^k$ (k は正の整数) を非空なコンパクト集合、 f を X 上で定義された実数値連続関数とする。このとき、 f は X 内で最大値と最小値を持つ。

予算集合 budget set

$$\{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p_1 x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \leq I\}$$

は、 $p_j > 0, j = 1, 2, \dots, \ell, I \geq 0$ であればコンパクト集合 compact set である[†]。したがって、仮定 2.1 があれば、消費者選択の問題 (2.1) には必ず解が存在する。

[†] コンパクト集合はこの章の数学付録で解説されている。また、ワイヤーシトラウスの定理も数学付録で証明のスケッチが与えられている。

問題 2.1 コンパクト集合の例を 3 つ挙げなさい。

ゼロ次同次性

以上のようにして価格と所得の各組 (p_1, \dots, p_ℓ, I) に対して (2.1) を通じて解 x_j^* が定義され、これによって需要関数 $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), j = 1, 2, \dots, \ell$ が得られる。このとき、任意の価格と所得の組 (p_1, \dots, p_ℓ, I) 、そして、任意の $\lambda > 0$ に対して、

$$x_j(p_1, \dots, p_\ell, I) = x_j(\lambda p_1, \dots, \lambda p_\ell, \lambda I), j = 1, 2, \dots, \ell$$

が成立する。これは、(2.1) の制約が λ によって変化しないことから直ちに従う。これを需要の価格と所得に関するゼロ次同次性という。

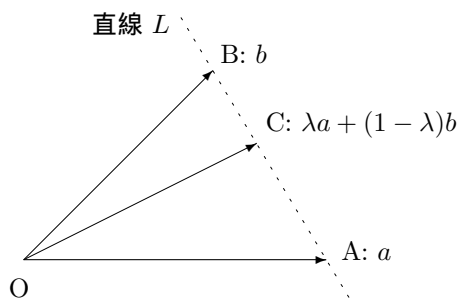


図 2.1: 凸結合

2.1.3 選好の凸性

次に、本章の最初に指摘しておいた「解決すべき問題」の (iii) を考察する用具を準備しておこう。そのために、凸集合 convex set という概念を導入する。いま、 \mathbb{R}^{ℓ} 上の2点 A と B に着目する。これらの座標はベクトル a, b として表現されている。A と B をむすぶ線分または直線をどのように表現するかを考えてみよう。いま、図のように線分上の一点 C が線分 BA を $\lambda : 1 - \lambda$, $0 < \lambda < 1$ に内分すると考えてみよう。初等的なベクトル演算から、

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BC}$$

である。いま、 $\overrightarrow{OB} = b$ かつ $\overrightarrow{BC} = \lambda(a - b)$ であることに着目すると、点 C は

$$b + \lambda(a - b) = \lambda a + (1 - \lambda)b$$

と表現される。 $\lambda a + (1 - \lambda)b$, $0 \leq \lambda \leq 1$ をベクトル a, b の凸結合 convex combination という。

λ がゼロから 1 に増加すれば、点 C は線分上を B から A に向けて動いていくことになる。 λ が負値になることや、1 以上の正数となることを許すならば、C は 2 点 A, B を通る直線 L を表現する。

定義 2.1 \mathbb{R}^ℓ の部分集合 S が凸集合であるとは、任意の 2 要素 $x, y \in S$ と任意の実数 λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$) に対して

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$$

を満たすことである。

ある無差別曲線よりも上の部分、以下上部集合 upper contour set と呼ぶ、について考察しよう。効用関数 $u(\cdot)$ が与えられている場合には、上部集合は

$$\{y \in X \mid u(y) \geq u(x)\}$$

となる。

経済学では、この上部集合が凸集合であるという性質、つまり無差別曲線が原点に向かってふくらんでいること、あるいは、選好の凸性を要求することが多い。

定理 2.2 選好が効用関数 $u(x_1, \dots, x_\ell)$ で表現できるとする。任意の上部集合が凸集合であることの必要十分条件は、任意の $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$, 任意の実数 λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$) について、

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y)) \quad (2.3)$$

が成立することである。(2.3) を満足する関数を準凹関数 quasi concave function と呼ぶ。

[証明] 任意の上部集合が凸であるとする。 x, y を任意の \mathbb{R}_+^ℓ の点とする。 λ を $0 \leq \lambda \leq 1$ の任意の実数とする。集合

$$S = \{z \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(z) \geq \min(u(x), u(y))\}$$

を定義する。 $x \in S$ かつ $y \in S$ は明らかである。 S は凸集合であるから、 $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S$ である。これは、

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y))$$

を意味する。

逆に, $u(\cdot)$ を準凹関数とする。任意の $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ に対して, 集合

$$S' = \{z \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(z) \geq u(x)\}$$

を定義する。任意の要素 $y \in S'$ を選ぶ。 λ を $0 \leq \lambda \leq 1$ を満たす任意の実数とする。 u は準凹関数だから,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \min(u(x), u(y)) = u(x)$$

である。 S' の定義によって, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in S'$ が示された。したがって, S' は凸集合である。 ■

さらに, 準凹関数を一歩進めて, 厳密な準凹関数を次のように定義する。

定義 2.2 効用関数 u が厳密な準凹関数 **strictly quasi concave function** であるとは, 任意の $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$ と任意の実数 λ , ($0 < \lambda < 1$) について,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) > \min(u(x), u(y)) \quad (2.4)$$

が成立することである。

定理 2.3 効用関数 u が厳密に準凹であるならば, (2.1) の解は一意 unique である。

[証明] いま (2.1) に異なる二つの解 x, x' が存在したとする。つまり, $u(x) = u(x')$ かつ $px = px' = I$ である。狭義準凹性から,

$$u\left(\frac{x}{2} + \frac{x'}{2}\right) > u(x) = u(x')$$

が成立する。かつ, $p(x/2 + x'/2) = I$ も自明である。これは x, x' が解であることに矛盾する。従って (2.1) の解は一意である。 ■

2.2 選好関係

授業ではほとんど触れなかったが, 選好関係 preference relation について付言しておきたい。この分野はミクロ経済学あるいはその理論的な応用

を目指す人には必須である³。しかし、他の分野の研究者には必ずしも必須ではなく、興味を持たない方は読みとばしても問題はない。

消費者の選択の対象となる消費ベクトルは $X \subset \mathbb{R}^\ell$ に属するものとする。これまで $X = \mathbb{R}_+^\ell$ としてきたが、この節では必ずしもそうではない。 X は選好場 preference field と呼ばれる。 X について

閉集合性 X は \mathbb{R}^ℓ の閉集合である。

下への有界性 X は不等号 \leq に関して下界 lower bound を持つ[†]。

凸集合性 X は凸集合である[‡]。

を仮定する。

選好場の自身との積集合 $X \times X$ の部分集合 R を関係 relation と呼ぶ。

定義 2.3 次の五つの性質を満たす関係 $\preceq \subset X \times X$ を選好関係と言う。

反射性 任意の $x \in X$ について $(x, x) \in \preceq$

推移性 任意の $x, y, z \in X$ について $(x, y) \in \preceq$ かつ $(y, z) \in \preceq$ ならば、
 $(x, z) \in \preceq$ である。

完備性 任意の $x, y \in X$ について $(x, y) \in \preceq$ または $(y, x) \in \preceq$ である。

連続性 任意の $x \in X$ について、二つの集合 $\{y \in X \mid (x, y) \in \preceq\}$ 、
 $\{y \in X \mid (y, x) \in \preceq\}$ は閉集合である。

³ 準順序 quasi order, 半順序 partial order, 順序 order 等は単に効用の基礎論にのみ用いるものではない。K.J. アローや A. センらが築き上げた社会的選択論 social choice theory は個人の順序付けから社会的な順序付けを確立できるルールがあるかを議論する。また、所得分配の不等をいかに測るかという議論も所得分配の集合にかんして、順序を入れる作業である。専門誌、例えば、*Econometrica*, *Social Choice and Welfare* 等を見れば判るように、この分野では今日ますます多くの論文が書かれている。順序に関する基礎的な議論を知るには、「集合論」Set Theory を概観しておくことが、遠回りであっても結果的には有用であろう。特にツオルンの補題 Zorn's Lemma とその周辺を知っておく必要がある。集合論は数学基礎論に属するが、Halmos, P.R. (1970), *Naive Set Theory*, Springer, や Stoll, R.R. (1961), *Set Theory and Logic*, Dover 等の読みやすい教科書がある。特に前者は 100 ページ程度の本で極めて易しく書かれている。あるいは、細部に立ち入らないでツオルンの補題だけを知るために、Dugandji, J. (1966), *Topology*, Allyn and Bacon Inc. の第 2 章を読むこともすすめられる。

† 「 \leq に関して下界を持つ」とは「ある b が \mathbb{R}^ℓ の中に存在して任意の $x \in X$ に対して $b \leq x$ が成立すること」である。

‡ 「 X は凸集合である」とは「任意の実数 λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$) と任意の 2 点 $x, y \in X$ について $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ が成立すること」である。

特に，反射性と推移性を満たす関係を準順序 preorder, quasiorder と呼ぶ。通常，準順序 \preceq が

反対称性 $(x, y) \in \preceq$ かつ $(y, x) \in \preceq$ ならば $x = y$ となる。

を満たす時，半順序 partial order と呼ばれる。選好関係では反対称性が課されていないことに注意せよ。選好関係は，経済学で用いる無差別図表を表現するための道具である。その表現に合わせて， $(x, y) \in \preceq$ を $x \preceq y$ と表現することが多い。選好関係と効用関数について次の定理が知られている。

定理 2.4 (表現定理) 選好関係は連続的な効用関数によって表現できる。すなわち， X 上に連続関数 u が存在して，

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

が成立する。

この定理は，いくぶん技術的に過ぎるので，ここでは証明しない。興味のある方は G., Debreu (1959), *Theory of Value*, Yale University Press の 56page (1) を参照するのがよい。

2.3 数学付録

集合 X から集合 Y への関数 function f とは，任意の $x \in X$ に対して Y のある 1 つの要素 $f(x) \in Y$ † を対応させるルールである。このとき， X を定義域 domain， Y を値域 range という。

† どの x についても $f(x)$ はただ一つでないといけない。

定義 2.4 \mathbb{R}^n の点列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ が $x \in \mathbb{R}^n$ に収束する(あるいは単に $x^\nu \rightarrow x$ as $\nu \rightarrow \infty$ と書く)とは，任意の正の数 ε に対して，ある番号 n_0 が存在して， $n \geq n_0$ をみたすどのような番号 n についても， $\|x_n - x\| < \varepsilon$ が成立することである。

定義 2.5 \mathbb{R}^n の部分集合 X が有界であるとは，ある正の数 K が存在して，どのような $x \in X$ に対しても $\|x\| \leq K$ が成立することである。

定義 2.6 \mathbb{R}^n の部分集合 X が閉集合であるとは, X 内に列 $x^\nu \in X$, $\nu = 1, 2, \dots$, をとったとき, ある点 $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して $x^\nu \rightarrow x$ as $\nu \rightarrow \infty$ が成立するならば, $x \in X$ が成立する集合である。

定義 2.7 \mathbb{R}^n の部分集合 X がコンパクト集合であるとは, それが有界かつ閉集合となることである⁴。

定義 2.8 f を \mathbb{R}^n の部分集合 X 上で定義された関数とする。 f が連続であるとは, 任意の $x \in X$ について, x に収束する X の列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ をどのように選んでも, 実数列 $f(x^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ が $f(x)$ に収束することである。

ワイヤーシトラウスの定理：証明のスケッチ

集合 $Y \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in X\}$ は実数の非空な部分集合である。 Y が上に有界[†]でないとする。任意の正の整数 ν について $f(x^\nu) \geq \nu$ となるような点 $x^\nu \in X$ が存在する。自然数 ν を動かしていくことによって, 列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ が X の中にとれる。 x^ν は有界な集合 X の中に含まれるから, 或る $x \in \mathbb{R}^\ell$ と $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ の部分列[‡] $x^{\nu_i}, i = 1, 2, \dots$ が存在して, $x^{\nu_i} \rightarrow x$ as $i \rightarrow \infty$ である^{‡‡}。 X は閉集合だから $x \in X$ であり, f は連続だから, $f(x^{\nu_i}) \rightarrow f(x)$ as $i \rightarrow \infty$ でなければならない。一方, $f(x^{\nu_i}) \geq \nu_i$ であるから, $f(x) = \infty$ ということになって, f は $x \in X$ で定義されていない。これは矛盾である。よって, Y は上に有界である。

Y の上界 (任意の $y \in Y$ について $y \leq u$ となるような数 u を上界 upper bound という) の最小値を s とする^{‡‡}。任意の正の整数 ν にたいして, $s - 1/\nu$ は Y の上界ではない。よって, ある x^ν が X の中に存在して, $s \geq f(x^\nu) > s - 1/\nu$ である。このような点 x^ν が X の中に列を作るから, ある点 x に収束する部分列を取り出すことができる。このとき f の連続性を考慮すると, $f(x) = s$ である。 s は Y の一つの上界だから $x \in X$ で f は最大値 s を達成する。

最小値に関しては, $-f$ について上と同様の議論を繰り返せば良い。 ■

⁴有限時限のユークリッド空間を離れると, コンパクト集合の定義はこれとは異なるのが通常である。

† 「実数の集合 Y が上に有界である」 \Leftrightarrow 「ある数 u が存在して任意の $y \in Y$ について $y \leq u$ 」である。このような u を Y の上界という。

‡ 「 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ の部分列」とは, ある正の整数の無限個のならば $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_1 < \nu_2 < \dots$ をとってきたときにできる列 $x^{\nu_i}, i = 1, 2, \dots$ である。

‡‡ X がコンパクトであることの必要十分条件は X 内の任意の列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ に収束する部分列が存在することである。

‡‡ 非空で上に有界な実数の集合には上限 (最小上界, supremum) が存在する。これは実数の基本的な性質である。

第3章 需要の諸性質

多くの経済理論では、最大化の必要条件を導出しそれを解釈することによって、その解の性質を調べ、そして経済的含意を引き出すことが多い。その標準的な方法がラグランジュ法である。ここでは、全章の問題 (2.1) をラグランジュ法によって解説する。ここでは、効用関数は \mathbb{R}_+^ℓ で非減少、内部 \mathbb{R}_{++}^ℓ で連続微分可能であると仮定する。つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \geq 0, \text{ for all } i, \text{ for all } x \in \mathbb{R}_{++}^\ell$$

と仮定する。さらに、 $I > 0$ と仮定する。

3.1 限界効用均等則

まず、第1章の問題 (2.1) の解 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_\ell^*$ において、 $x_1^* > 0, \dots, x_m^* > 0, x_{m+1}^* = 0, \dots, x_\ell^* = 0$ となったとする。このとき、必要条件として

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x^*)/\partial x_1}{p_1} = \dots = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_m}{p_m} \\ \geq \frac{\partial u(x^*)/\partial x_k}{p_k}, \quad k = m+1, \dots, \ell \end{aligned} \quad (3.1)$$

が成立することを示そう。ここで、 $x^* \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^*, \dots, x_\ell^*)$ である。これは、いわゆる「限界効用均等則」である¹。

[Step 1] いま、第1章の問題 (2.1) の解 x^* では $x_1^* > 0, \dots, x_m^* > 0, x_{m+1}^* = 0, \dots, x_\ell^* = 0$ である。二つのインデックス i, j , $1 \leq j \leq m$ [†] において、

¹ 関数の定義域の境界における微分については数学付録を参照せよ。

[†] インデックス i は $1 \leq i \leq \ell$ であることに注意。

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} > \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j}$$

が成立したとする。この時、 $\varepsilon > 0$ にたいして

$$h_i = \frac{p_j}{p_i} \varepsilon$$

$$h_j = -\varepsilon$$

$$h_k = 0 \quad \text{if } k \neq i, j$$

と $h = (h_1, \dots, h_\ell)$ を定義すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} p_k(x_k^* + h_k) &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* + p_i h_i + p_j h_j \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* + p_i \frac{p_j}{p_i} \varepsilon + p_j (-\varepsilon) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* \leq I \end{aligned}$$

となる。しかも、 $x_j^* > 0$ であるから、 ε を十分小さくとれば、 $x_j^* + h_j = x_j^* - \varepsilon > 0$ である。よって、組 $x^* + h$ は予算制約を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} u(x^* + h) - u(x^*) &= h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + h_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*) + o(x^*, h) \\ &= p_j \varepsilon \left(\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} - \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j} + \frac{\sqrt{p_i^2 + p_j^2}}{p_i p_j} \frac{o(x^*, h)}{\|h\|} \right) \end{aligned}$$

である。 ε が十分小さければ、 $o(x^*, h)/\|h\|$ は十分小さな値であり、したがって、右辺の値は仮定により正值である。これは矛盾である。よって、

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} \leq \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j}$$

が成り立たねばならない。

[Step 2] インデックス i について $1 \leq i \leq m$ であるならば, Step 1 より逆方向きの不等式が成立するから,

$$\frac{\partial u / \partial x_i(x^*)}{p_i} = \frac{\partial u / \partial x_j(x^*)}{p_j}$$

が成立する。

[Step 3] 以上によって, 限界効用均等の法則が成立する。■

第 2 章の問題 (2.1) の解 x^* において, 予算が厳密な不等号:

$$p_1 x_1^* + \cdots + p_\ell x_\ell^* < I$$

が成立しているケースも考えられる。このような場合には, x^* は飽和 satiation しているという。このような事態は稀にしか起こらないので, 次のような局所非飽和 local non-satiation を仮定する。つまり,

局所非飽和 任意の $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ と任意の正の実数 ε について,
 $\|y - x\| < \varepsilon, y \in \mathbb{R}_+^\ell$ かつ $u(y) > u(x)$ を満たす y が存在する。

を仮定する。局所非飽和の仮定のもとでは, 予算制約は

$$p_1 x_1^* + \cdots + p_\ell x_\ell^* = I$$

となり, 等号で成立する。

問題 3.1 局所非飽和の仮定があれば, 予算制約は等号で成立することを示しなさい。

3.2 ラグランジュの必要条件

限界効用均等則を書き換えると,

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*) - \lambda^* p_j \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, \ell \quad (3.3)$$

$$I - (p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \dots + p_\ell x_\ell^*) = 0 \quad (3.4)$$

となるような λ^* が存在する。これより, 次のラグランジュ関数 Lagrangean

$$L(x_1, \dots, x_\ell, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_1, \dots, x_\ell) + \lambda(I - p_1 x_1 - \dots - p_\ell x_\ell) \quad \dagger$$

† 記号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ は左辺が右辺によって定義されていることを示す記号である。

を定義してみる。変数 λ をラグランジュ乗数 Lagrange multiplier という。いま, L が x^* において極大値を, λ^* において極値を達成するとすると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda^*) &\leq 0, \quad j = m + 1, \dots, \ell \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) &= 0, \end{aligned}$$

が成立する。これはそれぞれ (3.2), (3.3), (3.4) に他ならない。あるいはこれを

$$\begin{aligned} x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) &= 0, \end{aligned}$$

と書くこともできる。これらを一階の条件 first order condition, FOC と呼ぶ。最後の条件は定理 4.5 で再度議論され, 効用関数が準凹関数であるとき, FOC の解は最大化問題 (2.1) の解となることが示される。

いま，効用関数に， \mathbb{R}_{++}^ℓ における厳密な増加性，つまり，

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) > 0, \text{ for all } i, \text{ for all } x \in \mathbb{R}_{++}^\ell \quad (3.5)$$

を仮定する。この仮定があれば，局所非飽和性は成立することに注意せよ。さらに， $I > 0$ と仮定する。本章においては以降，この二つを継続して仮定する。

問題 3.2 u が \mathbb{R}_{++}^ℓ において厳密に増加的であることは，(3.5) の必要条件であるが，十分条件でないことを確認しなさい。

すべての解が正値 $x_i^* > 0, i = 1, 2, \dots, \ell$ であれば（内点解であれば），一階の条件は

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0,$$

となる。本章では以下，

内点解の仮定：第 1 章の問題 (2.1) の解は内点解 $x_j^* > 0, j = 1, 2, \dots, \ell$ である

を想定する。

一階の条件は微分がすべてゼロであるから，第 1 章の問題 (2.1) の解 x^* は $L(x, \lambda)$ が極値を持つ条件を満たすのである。

上の議論は一般的な最大化問題でも成立する。すなわち，次のような定理が成立する。

定理 3.1 (ラグランジュの未定乗数法) ${}^2\theta, g$ を $X \subset \mathbb{R}^n$ 上の連続微分可能な実数値関数とする。このとき，

$$\max_{x \in X} \theta(x) \quad \text{subject to } g(x) = 0$$

²解説や証明については，入谷・久我 (1999) 『数理経済学入門』有斐閣，第 8 章，定理 8.8, page 201 を参照せよ。

が x^* において最大値を持つとする。 x^* が定義域 X の内点であり、ある番号 i において、

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) \neq 0$$

が満たされるとする。上の最大化問題において x^* で解を持つ必要条件是、

$$L(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(x) + \lambda g(x)$$

が (x^*, λ^*) で極値を持つ必要条件と一致する。

問題 3.3 効用関数を $u(x_1, x_2) = (x_1)^\alpha (x_2)^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$ とする、予算制約を $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, とするとき、ラグランジュ法を用いて需要関数を求めなさい。ただし、 $p_1 > 0, p_2 > 0, I > 0$ である。

二階の必要条件

いっそう精緻な必要条件を求めることが次の課題である。このサブセクションでは、効用関数は二回連続微分可能であると仮定する[†]。さらに、条件 (3.5) $\partial u(x^*)/\partial x_j > 0, j = 1, 2, \dots, \ell$ は、もちろん、仮定されていることに注意しておく[‡]。

いま x を予算制約 $px = I$ を満たす任意の消費ベクトルとする。

$$u(x^*) \geq u(x)$$

でなければならない。さらに、 $h \in \mathbb{R}^\ell$ を

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_\ell h_\ell = 0$$

をみたす任意のベクトルとする。 x^* は内点解であるから、十分小さな μ について $x^* + \mu h \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ かつ $p(x^* + \mu h) = I$ である^{‡†}。消費ベクトル $x^* + \mu h$ は予算を満たすから、テーラーの定理を用いて³、ある実数 $\theta, (0 < \theta < 1)$

³テーラーの定理については数学付録を参照せよ。

[†] 2次微分 $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ がすべて連続関数となるとき、 u を二回連続微分可能と言う。

[‡] 一階の条件から $\lambda > 0$ となることに注意。

^{‡†} $x^* + h$ が \mathbb{R}_+^ℓ に含まれない可能性がある、つまり、 u の定義域に $x^* + h$ が入らない可能性がある。それで、十分小さな $\mu (> 0)$ を導入していることに注意。

が存在して,

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(x^* + \mu h) - u(x^*) \\ &= \mu \sum_{i=1}^{\ell} h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta \mu h) \end{aligned}$$

一階の条件を考慮すると

$$\begin{aligned} &= \mu \lambda^* \sum_{i=1}^{\ell} h_i p_i + \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta \mu h) \\ &= \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta \mu h) \end{aligned}$$

が成立する。つまり、この不等式は

$$p h = 0 \quad \text{であれば} \quad \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta \mu h) \leq 0$$

を意味している。これは十分小さな任意の μ について成立する。よって μ をゼロに近づけると、効用関数は二回連続微分可能であるから、

$$p h = 0 \quad \text{であれば} \quad \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^*) \leq 0 \quad (3.6)$$

が成立する。これは解 x^* が満たす必要条件である。これを二階の条件という。

条件 (3.6) は $u(\cdot)$ の x^* における性質であるので、効用関数に予め要求しなければならないものである。条件 (3.6) がどのようなものであるかを調べてみよう。

説明の簡単化のために $\ell = 2$ とする。また、記号法を簡略化して、 $u_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_i}$

$\partial^2 u(x^*)/\partial x_i \partial x_j$ と表わす。(3.6) を再述すれば,

$p_1 h_1 + p_2 h_2 = 0$ となる任意の h_1, h_2 について

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i h_j u_{ij} \leq 0 \text{ が成立する}$$

ということである。 $h_2 = -h_1(p_1/p_2)$ より, 任意の h_1 について

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i h_j u_{ij} = (h_1)^2 \left(u_{11} - (u_{12} + u_{21}) \frac{p_1}{p_2} + u_{22} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \right) \leq 0$$

である。よって,

$$\begin{aligned} 0 &\geq u_{11} - (u_{12} + u_{21}) \frac{p_1}{p_2} + u_{22} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & p_1/p_2 & 1 \\ p_1/p_2 & u_{11} & u_{12} \\ 1 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = - \frac{1}{(p_2)^2} \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \\ &= - \left(\frac{1}{p_2 \lambda} \right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

でなければならない。

以上によって, x^* において最大値を達成する必要条件は,

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (3.7)$$

と表現できる。この条件は (3.6) の必要条件であるが, こちらを二階の条件と呼ぶこともある。

二階の条件は財の数が2以上の場合も同様に述べることができる, ここでは結果だけを示しておく⁴。(3.6) の必要条件[†]は,

⁴入谷・久我『数理経済学入門』page 196 系 8.3 参照。この本の 195-196 page にある定

[†]必ずしも十分条件ではない。

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_r & u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{vmatrix} \geq 0, \quad r = 2, 3, \dots, \ell \quad (3.8)$$

が成立することである。

3.3 十分条件

次に, $x^* \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $px^* = I$ をみたく x^* において第 1 章の問題 (2.1) が極大値 local maximum となる十分条件を求めるのがこの節の目標である⁵。この節でも, 効用関数 u が 2 回連続微分可能性[†] であると仮定する。

† 二次導関数が連続であること。

定理 3.2 ある x^*, λ^* が存在して,

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i x_i^* = I, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) = \lambda^* p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.9)$$

$$h = (h_1, \dots, h_\ell) \neq [0] \text{ かつ } ph = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j u_{ij}(x^*) < 0 \quad (3.10)$$

を満たし, かつ, u が局所非飽和であるならば, x^* は第 1 章の問題 (2.1) の極大解である。

[証明] u は局所非飽和であるから, 予算制約を満たす任意の消費ベクトル y に対して, 予算制約を等号で満たす x が存在して, $px = I$ かつ, $u(x) \geq u(y)$ を満たすようにできる。したがって, x^* が極大値をもたらすことを示すために, 予算制約を等号で満たすものだけと比較するだけで十分である。

理 8.7 の $(-1)^r$ は $(-1)^{m+r}$ の誤り。

⁵ 極大値の定義については数学付録を参照せよ。

いま, ε を正の定数として, 二つの集合 $C \stackrel{\text{def}}{=} \{h \in \mathbb{R}^\ell \mid ph = 0, \|h\| = 1\}$ と $U(x^*, \varepsilon) = \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \|x - x^*\| < \varepsilon\}$ を定義する。 $(h_1, \dots, h_\ell, x_1, \dots, x_\ell) \in C \times U(x^*, \varepsilon)$ に対して定義される関数:

$$q(h, x) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j u_{ij}(x)$$

は, u が2回連続微分可能であるから, 連続である。次の主張が成立する。

主張: ある $\hat{\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の $(h, x) \in C \times U(x^*, \hat{\varepsilon})$ について, $q(h, x) < 0$ を成立させる。

上の主張を否定してみよう。つまり, どのような $\varepsilon > 0$ に対しても, 主張が成立しなかったと仮定してみる(背理法の仮定)。任意の正の整数 ν に対して, ある $(h^\nu, x^\nu) \in C \times U(x^*, 1/\nu)$ が存在して,

$$q(h^\nu, x^\nu) \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

である。列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ は x^* に収束する列である。さらに, $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ はコンパクト集合 C 内の点列であるから, 収束する部分列を取り出すことができる。一般性を失うことなく, $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ 自身を収束する列とし, その収束先を h^* とする。 $q(h, x)$ の連続性より, $q(h^*, x^*) \geq 0$ であり, $\|h^*\| = 1$ であるから $h^* \neq [0]$ である。これは, (3.10) に矛盾する。したがって [主張] は成立する。

いま, x を $px = I, \|x - x^*\| < \hat{\varepsilon}, x \neq x^*$ を満たす任意の消費ベクトルとする。ここで, $h = x - x^*$ とすると, $ph = 0$ であり, $\|h\| \neq 0$ も明らかである[†]。そこで, テーラー展開を用いて, ある $\theta (0 < \theta < 1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} u(x) - u(x^*) &= \sum_{i=1}^{\ell} h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta h) \\ &= \|h\|^2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta h) \end{aligned}$$

[†] ここでは, 必ずしも $\|h\| = 1$ となっていないことに注意せよ。

となる。ここで、 $\|x^* + \theta h - x^*\| = \theta \|h\| = \theta \|x - x^*\| < \hat{\varepsilon}$ であることを考慮すると、上の式は負値である。よって、 $u(x^*) \geq u(x)$ である。

以上によって、 u は x^* において極大値を持つことが示された。■

(3.10) の必要十分条件は

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_r & u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 2, 3, \dots, \ell \quad (3.11)$$

が成立することである。†

様々な応用分野では、(3.11) が仮定されることが多い。これは、次のセクションでの議論における重要な仮定となる。

† (3.8) は (3.7) の必要条件であるが、ここでは、必要十分条件になっていることに注意せよ。入谷・久我『数理経済学入門』page 210 参照。

3.4 代替効果と所得効果

このサブセクションでは u は 2 回連続微分可能、かつ、第 1 章の問題 (2.1) の解 x^* では $x_i^* > 0, i = 1, 2, \dots, \ell$ が成立すると想定する。さらに、

正則条件：十分条件 (3.11) が x^* において成立する

を仮定する。2 回連続微分可能性より (3.11) は x^* の近傍 N で成立する。

微分可能な需要関数の存在

まず前節で学んだラグランジュの一階の条件によって、 $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ において、

$$\begin{aligned} -p_1 x_1 - \cdots - p_\ell x_\ell + I &= 0 \\ -\lambda p_i + u_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

が成立する。言い換えると, $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ は連立方程式の解である。左辺のヤコビ行列式をつくり, $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ において評価すると

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\lambda^*}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_\ell \\ u_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

となる。この式の両辺にあるのは行列式であるが、この行列式にあるような要素の配置を持つ行列を（右辺でも左辺でも）縁つきヘッセ行列 bordered Hesse matrix という⁶。以下で、左辺の行列の行列式を Δ 、右辺の第2項の行列の行列式を D と表記して用いる。正則条件が仮定されているから、左辺はゼロではない。よって、陰関数定理が適用できる[†]。つまり、 (p_1, \dots, p_ℓ, I) の近傍 U と U から (x^*, λ^*) の近傍 W への連続微分可能な $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), \lambda(p_1, \dots, p_\ell, I)$ が存在して[‡]

$$-p_1 x_1(p_1, \dots, p_\ell, I) - \cdots - p_\ell x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I) + I = 0 \quad (3.13)$$

$$-\lambda(p_1, \dots, p_\ell, I) p_i + u_i(x(p_1, \dots, p_\ell, I)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.14)$$

が任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について成立する。必要なら U をさらに制約することによって、任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について、

$$(x_1(p_1, \dots, p_\ell, I), \dots, x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I)) \in N$$

とすることができる。この事実と (3.13), (3.14) が成立すること、さらに、正則条件が成立することをみると、前節で得られた十分条件が満たされている。任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について、

$$x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{は第1章の問題 (2.1) の解である} \quad (3.15)$$

が成立する。これは、近傍 U 上で微分可能な需要関数が存在していることに他ならない。

⁶二次導関数からなる行列は単に、ヘッセ行列 Hesse matrix と呼ばれる。

[†] 陰関数定理はこの章の数学付録の最後に紹介されている。

[‡] 価格と所得 (p_1, \dots, p_ℓ, I) はこれまで、最大化問題の際のある一定値に固定されて来た。以降しばしば近傍 U の任意の要素についても同じ記号を用いる。関数としての表現であるので、混乱は避けられよう。

ラグランジュ乗数とルワの恒等式

需要関数とともに得られたラグランジュ乗数 $\lambda(p_1, \dots, p_\ell, I)$ の意味を探ってみよう。いま合成関数によって

$$v(p_1, \dots, p_\ell, I) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_1(p_1, \dots, p_\ell, I), \dots, x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I))$$

を定義する。これは間接効用関数 indirect utility function と呼ばれる。合成関数の微分を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial I} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} \\ &= \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + \dots + \lambda p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial I} \end{aligned}$$

(3.13) を I で微分したものを考慮して、

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda \tag{3.16}$$

が得られる。つまり、 $\lambda^* = u_i(x^*)/p_i$ は「所得が限界的に増加したとに、どの率で効用が増えるか」という所得の限界効用を意味している。

次に、間接効用と価格の関係について考察しよう。全く同様に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_j} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_j} \\ &= \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + \dots + \lambda p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_j} \\ &= -\lambda x_j \end{aligned} \tag{3.17}$$

が得られる。これはルワの恒等式 Roy's identity と呼ばれる⁷。

⁷本によってはロイの恒等式とも呼ばれる。「ルワ」はフランス語の読みに従ったものである。

価格の変化がおよぼす効果

さて、次に、価格が変化した時に需要がどのように変化するかを考察しよう。(3.13), (3.14) を p_i で微分してみよう。すると、

$$\begin{aligned}
 -p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} - \cdots - (x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}) - \cdots - p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\
 -p_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{11} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{1\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -\lambda - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{i\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -p_\ell \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{\ell 1} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{\ell \ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。行列の形式に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \cdots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \lambda / \partial p_i \\ \partial x_1 / \partial p_i \\ \vdots \\ \partial x_i / \partial p_i \\ \vdots \\ \partial x_\ell / \partial p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.18)$$

所得の増加による効果

次に、所得が変化した時に需要がどのように変化するかを考察しよう。
(3.13), (3.14) を I で微分してみよう。すると、

$$\begin{aligned} -p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} - \cdots - p_i \frac{\partial x_i}{\partial I} - \cdots - p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= -1 \\ -p_1 \frac{\partial \lambda}{\partial I} + u_{11} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \cdots + u_{1\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ -p_\ell \frac{\partial \lambda}{\partial I} + u_{\ell 1} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \cdots + u_{\ell \ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= 0 \end{aligned}$$

となる。行列の形式に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \lambda / \partial I \\ \partial x_1 / \partial I \\ \vdots \\ \partial x_\ell / \partial I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よってクラメールの公式 Cramer's rule によって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial I} &= \frac{1}{\Delta} \times \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & 0 & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & 0 & \cdots & u_{\ell \ell} \end{vmatrix}}^j \\ &= -\frac{\Delta_j}{\Delta} = \lambda \frac{D_j}{D} \end{aligned} \tag{3.20}$$

となる。 Δ_j, D_j は従来の記号である。

代替効果

相対価格の変化がもたらす効果を純粋に取り出すという目的で考案されたものである。つまり、価格変化は二つの経路をとって需要に効果をもたらすと考えられる。一つは、純粋の相対価格の変化の効果であり、いま一つは価格変化に伴う実質所得の変化がもたらす効果である。最初のを代替効果 substitution effect, 第2のものを所得効果 income effect と呼ぶ。代替効果は標準的には次のような手続きで考察される。つまり、価格が変化したとき、効用水準が一定に保持されるように所得が補償されるとすると、需要がどのように変化するかというものである。「効用水準が一定に保持されるように所得が補償される」という手続きを付け加えることによって「価格変化のもたらす実質所得の変化」を抜き去ろうというのである。

では、所得の補償をどのように表現すれば良いのであろうか。いま間接効用関数を用いて、 $v(p_1, \dots, p_\ell, I)$ の値を \bar{u} とする。ここで、 \tilde{I} に関する方程式

$$v(p_1, \dots, p_\ell, \tilde{I}) = \bar{u}$$

は $\tilde{I} = I$ で解を持つ。さらに、(3.16) によって、

$$\frac{\partial v}{\partial I}(p_1, \dots, p_\ell, I) = \lambda \neq 0$$

である。この二つの事実から陰関数定理を適用することができて、補償所得 compensated income は局所的に微分可能な関数 $\tilde{I}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_\ell)$ によって表現できる。もちろん $\tilde{I}(p_1, \dots, p_\ell) = I$ である。そこで、 $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ とすれば、

$$v(p_1, \dots, p_\ell, \tilde{I}(p)) = \bar{u}$$

が成立するから、第 i 財価格が変動する時、

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} = 0$$

この式を見る時は、左辺第一項は $v(p, \tilde{I}(p))$ の最初の p のなかにある p_i による微分であることに注意せよ。

よって, (3.16), (3.17) を用いて,

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} = -\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial \tilde{I}} = -\frac{-\lambda x_i}{\lambda} = x_i \quad (3.21)$$

となる。

ここで合成関数 $x_j(p, \tilde{I}(p))$ の中の補償所得関数 $\tilde{I}(p)$ は \bar{u} をもパラメータとして有している。それを明示して, $x_j(p, \tilde{I}(p, \bar{u}))$ と書く。これが補償需要関数 compensated demand function, あるいはヒックスの需要関数 Hicksian demand function である。 p が何度も出現する煩雑さを解消して単に $x_j(p, \bar{u})$ と書かれることもある。第 i 財価格の変化による第 j 財の代替効果 S_{ji} は, 所得の補償を伴った需要の変化であるから,

$$\begin{aligned} S_{ji} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{I}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

である。ラグランジュ乗数も $\lambda(p, \tilde{I}(p, \bar{u}))$ と合成関数として表現できる。同様にして,

$$\Lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{I}}$$

とする。

さて, 価格の関数としての補償所得 $\tilde{I}(p, \bar{u})$ を需要関数等に代入すると, 一階の条件は

$$\begin{aligned} -p_1 x_1(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) - \dots - p_\ell x_\ell(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) + \tilde{I}(p, \bar{u}) &= 0, \\ -\lambda(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) p_j + u_j \left(x_1(p, \tilde{I}(p, \bar{u})), \dots, x_\ell(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) \right) &= 0, j = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

となる。ここで, p_i の変動のおよぼす効果を考察するために, p_i によって

微分すると,

$$\begin{aligned}
 -p_1 S_{1i} - \cdots - (p_i S_{ii} + x_i) - \cdots - p_\ell S_{\ell i} + \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} &= 0 \\
 -p_1 \Lambda_i + u_{11} S_{1i} + \cdots + u_{1\ell} S_{\ell i} &= 0 \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -p_i \Lambda_i + u_{i1} S_{1i} + \cdots + u_{i\ell} S_{\ell i} &= \lambda \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -p_\ell \Lambda_i + u_{\ell 1} S_{1i} + \cdots + u_{\ell \ell} S_{\ell i} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。(3.21) を考慮して, 行列の形式に書き直すと,

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \cdots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_i \\ S_{1i} \\ \vdots \\ S_{ii} \\ \vdots \\ S_{\ell i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よってクラメールの公式 Cramer's rule によって,

$$\begin{aligned}
 S_{ji} &= \frac{1}{\Delta} \times \begin{vmatrix} \overbrace{0 \quad -p_1 \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad -p_\ell}^j \\ -p_1 \quad u_{11} \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad u_{1\ell} \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -p_i \quad u_{i1} \quad \cdots \quad \lambda \quad \cdots \quad u_{i\ell} \\ \vdots \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ -p_\ell \quad u_{\ell 1} \quad \cdots \quad 0 \quad \cdots \quad u_{\ell \ell} \end{vmatrix} \\
 &= \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \lambda \frac{D_{ij}}{D}
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる。 Δ_{ij} , D_{ij} は従来の記号である。

所得効果と代替効果への分解

以上の準備によって、(3.19) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_j}{\partial p_i} &= -\lambda x_i \frac{D_j}{D} + \lambda \frac{D_{ij}}{D} \\ &= -x_i \frac{\partial x_j}{\partial I} + S_{ji} \\ &= \text{所得項} + \text{代替項}\end{aligned}\tag{3.23}$$

と分解できる。これをスルツキー方程式 Slutsky equation と呼ぶ。

3.5 連関性

財相互間の「つながり」を表現することを考えてみよう。これらは経済学の諸分野で利用される基礎的な概念である。それらは財の連関性 relatedness とよばれる。財の連関性とは、財と財がお互に競争的である（例えば、コーヒーと紅茶）、または、補い合うような関係にある（例えば、紅茶と砂糖）、といった財相互間の関係を総称するものである。財相互間の連関性は需要関数と密接につながっているであろうから、需要関数によって表現できるはずである。これに付け加えて、その財自身が持っている品質の違い（例えば、上級品とか下級品）も需要関数と関係しているはずである。これらも需要関数で表現できるだろう。

連関性の定義

直感的に理解できるような、コーヒーと紅茶のような競争的な関係にある財を代替財 substitutes とよぶ。

定義 3.1 (粗代替 gross substitute) 財 j が財 i の粗代替財であるとは、 p_i の上昇（下落）が財 j の需要の増加（resp. 減少）をもたらすことであ

る。正確には，

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \geq 0, \text{ (resp. } S_{ji} \geq 0)$$

のとき，財 j は財 i の粗代替財 (resp. 代替財) である。

また，紅茶と砂糖のように補い合う関係を 2 財を，補完財 complements とよぶ。

定義 3.2 (粗補完 gross complement) 財 j が財 i の粗補完財であるとは p_i の上昇 (下落) が財 j の需要の減少 (resp. 増加) をもたらすことである。正確には，

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \leq 0 \text{ (resp. } S_{ji} \leq 0)$$

のとき，財 j は財 i の粗補完財 (resp. 補完財) である。

上の 2 つの定義において“粗”という接頭辞がついているのは所得項が入っていることを意味しており，この接頭辞がないのは，所得項が抜き去られて代替項だけに注目しているということである。このように財の連関性を定義すると， ℓ 種類の財があるから， ${}_{\ell}C_2 = \ell(\ell - 1)/2$ (異なる ℓ 個のものから 2 個をとりだす場合の数) だけの粗代替・粗補完あるいは代替・補完の関係があることになる。すると，財の需要は連関性によって網の目のように相互につながっていることになる。連関性の網の目を通じて，ある財価格の変化がいろいろな財の需要に変化を与えるのである。需要関数を $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I)$ とあらゆる価格に依存するよう書いて来たのは，暗黙のうち各財が相互に連関していることを想定していたのである。

品質の劣る財と見られるものを下級財 inferior goods または劣等財とよぶ。

定義 3.3 第 j 財が下級財であるのは，所得の増加 (減少) が第 j 財の需要の減少 (resp. 増加) をもたらす，つまり，

$$\frac{\partial x_j}{\partial I} \leq 0$$

を満たすものである。

品質の劣らない財を通常財 normal goods あるいは 上級財 superior goods とよぶ。

定義 3.4 第 j 財が下級財であるのは、所得の減少（増加）が第 j 財の需要の減少（resp. 増加）をもたらす、つまり、

$$\frac{\partial x_j}{\partial I} \geq 0$$

を満たすものである。

さらに、次のような性質の財を定義する。

定義 3.5 第 j 財がギッフェン財 Giffen goods であるのは、 p_j の減少（増加）が第 j 財の需要の減少（resp. 増加）をもたらす、つまり、

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_j} \leq 0$$

を満たすものである。

上の定義によると、通常財とか下級財は他の財との関連で約束されているのではなく、その財独自の性質であると考えられている。つまり、「ある財が他のある財に対して下級財である」といった表現は出来ないことに注意しなければならない。また、下級財の特別なものにはギッフェン財となるものがあると考えられる。例えば、馬鈴薯を取上げてみる。ある家計が馬鈴薯を主食にしていたとする。馬鈴薯の価格が下がれば、所得にゆとりが出来て、むしろ馬鈴薯の需要を減らして牛肉を需要するようになるかもしれない。このようなことが起これば、馬鈴薯の価格の下落が馬鈴薯の需要を減少させたということになる。

ギッフェン財が端的に示すことは、価格変化には「それに伴う実質所得の変化」が重要な役割を果たしているということである。例えば、上述の馬鈴薯と牛肉では、それが本来の二財の連関性からみると代替関係にあっても、価格変化からはそれを観測させないということがある。前節で行った所得効果と代替効果の分解は、それらを混在させないで純粋な形で抜き出すための作業であったのである。

代替効果の性質

財の数が $\ell = 2$ である場合には $S_{12} = S_{21} > 0$ となり、代替関係しか存在しない。財の数が 2 より大きい一般的なケースにはそれを言うことはできないが、代替関係が補完関係に優越するであろう「状況証拠」を示すことができる。そのために、代替項の性質を研究してみよう¹⁰。

法則 1 $S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, \ell$

この法則は第 j 財価格の変動がおよぼす第 i 財需要への代替効果は、第 i 財価格の変動がおよぼす第 j 財需要へのそれと同じであることを主張している。この法則の成立は D が対称行列の行列式であることから従う。

法則 2 $S_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, \ell$

これは、代替項に関する限り自己の価格上昇は需要を減少させることを示している。したがって、上で定義したギッフェン財は (i) 下級財で、(ii) 所得効果が代替効果を上回る、ということから生じるのである。上で「特別な下級財」という表現をしたのはこのような理由であった。

法則 3 $\sum_{j=1}^{\ell} p_j S_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, \ell$

この性質は行列式の余因子展開の形から容易に導出できる。

法則 4 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_j p_i S_{ij} < 0, \text{ for } n < \ell$

この性質を導出することはここではしないが、行列式に関するヤコビの定理より得られることを示唆するに止めよう。法則 4 を念頭において商品群 group of commodities を考察しよう。いま商品の集合 $\{1, \dots, n\}$ が一つの商品群であるとは、このグループの中では相対価格は変化しないと定義される。つまり価格の間に

$$p_i = \alpha_i p_1, i = 1, 2, \dots, n$$

となるような固定的な係数 α_i が存在するということである。このとき、 $\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(p_1, \dots, p_\ell, I)$ を商品群への需要と定義する。 p_1 がこの商

¹⁰J.R. Hicks (1956) *Value and Capital* 代替項の六則、参照。

品群の価格（代表価格）である。いま、 p_1 が変化したとき、これまでの結果から、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{X}}{\partial p_1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \alpha_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left(S_{ij} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} \right) \end{aligned}$$

となる。すると、法則4はこの商品群の代替項 $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j S_{ij}$ が負値であることを主張している。つまり、商品群に関して法則2が成立することを示している。

代替関係の優越性

さて、これまでは代替財とか補完財には単に定義を与えただけにとどまっていた。粗代替財（粗補完財）であれば、ある財の需要は他の財価格の上昇に対して増加する（resp. 減少する）という性質を持つであろう。では、粗代替と粗補完のどちらが多く見受けられるであろうか。経済を考察する上で需要関数が多大な役割を演じるのであるから、この問題にある程度の見通しを持っておくことは経済学を構築する上で重要である。

以下に説明することは、補完関係に比べて代替関係の方がたくさん存在するであろうという「代替関係の優越性」である^{11,12}。まず、法則2と3から2財経済では代替関係しか存在しないのは明らかである。では、 l 財経済ではどうであろうか。実は、 l 財経済でも代替関係が多いと信ずべき理由がある。いま、ある財 i を取上げ、他の財の全てを1つのグループとし

¹¹ 「代替関係の優越性」は Hicks, J.R. (1946) *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford University Press によってはじめて主張されたことである。

¹² 以下の説明は入谷 (1977) 「連関財の理論と代替関係の優越性」『大阪大学経済学』, 第26巻3・4号, 48-57 に基づいている。他に, Kamien, N.I. (1964) “A Note on Complementarity and Substitution,” *International Economic Review*, Vol. 5, 221-227 も参照されたい。

て1つの商品群とみなしてみる。つまり、1つの財 i と1つの商品群とからなる2財経済と理解することができる。すると、代替関係しかあり得ない。法則4から知れるように、商品群の中に財 i と代替財になるものが存在しなければならない。しかも最初に選ぶ財 i は任意でよいので、多くの代替関係を見出すことができる。また、任意の2つの財をまとめて1つの商品群とみ、他の全部を1つの商品群と考えてみる。するとやはり、代替関係しか存在しない。これは2つの財の少なくともどちらか一方と残りの商品群に属するある財とが代替関係であることを意味している。この議論をどんどん続けて行くと、 ℓ 財経済でも数多くの代替関係が見出されるということになる。

上の議論をいま少し正確に展開してみよう。第一財に注目して、法則2, 3から、ある財 $k(> 1)$ が存在して $S_{1k} > 0$ である。いまインデックスの集合 $\{2, \dots, \ell\}$ に財の番号の付け替えを行って $k = 2$ とできる。もちろん、番号の付け替えを行っても上述の法則1-4が成立することは言うまでもない。新たな番号付けに従って、財 $\{1, 2\}$ について法則3, 4を考慮すると、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_i p_j S_{ij} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^{\ell} p_i p_j S_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_i p_j S_{ij} < 0$$

である。よって、ある番号 $k(> 2)$ が存在して、 $S_{ik} > 0, i = 1 \text{ or } 2$ が成立する。再び $k = 3$ となるように財の番号の付け替え[†]を行うと、

$$S_{i_2} > 0, S_{i_3} > 0, i_2 = 1, i_3 = 1 \text{ or } 2$$

となる。このような番号の付け替えを行っても上述の法則1-4はまだなお成立する。

[†] 財の番号 $\{1, 2\}$ についてはそのまま、番号 $\{3, 4, \dots, \ell\}$ について番号の付け替えをすることに注意。

さらに，財 $\{1, 2, 3\}$ について法則 3, 4 を考慮すると，

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i p_j S_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=4}^{\ell} p_i p_j S_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i p_j S_{ij} < 0$$

である。よって，ある番号 $k (> 3)$ が存在して， $S_{ik} > 0, i = 1, 2$ or 3 が成立する。再び $k = 4$ となるように財の番号の付け替えを行うと，

$$S_{i_2 2} > 0, S_{i_3 3} > 0, S_{i_4 4} > 0, i_j < j, j = 2, 3, 4$$

となる。以上の手続きを繰り返すと，

$$S_{i_j j} > 0, i_j < j, j = 2, 3, \dots, \ell \quad (3.24)$$

に至る。(3.24) は少なくとも $\ell - 1$ 個の代替関係があることを示している。

いま 1 つ代替関係が多く存在する原因がある。例えば，3 財を考えて，財 A は財 B の代替財で，同時に財 B は財 C の代替財であるとしてみよう。このとき，財 A は財 C の代替財になるのが自然である。例えば，コーヒーが紅茶の代替財で，紅茶がココアの代替財なら，コーヒーはココアの代替財になっているのである。この代替財の連鎖はヒックス・森嶋の連鎖ルールの一部であるが，人間の選好にはよくある性質であるように思われる。仮にこの連鎖ルールを認めると，代替関係はますます増加するであろう。実際，次の定理が成立する。

定理 3.3 代替財にかんするヒックス・森嶋の連鎖ルール（代替財の代替財は代替財である）を認めれば，あらゆる 2 財は代替関係にある。

[証明] 関係 (3.24) が成立するような財番号の付け方が存在する。その番号の付け方が採用されているものとし，番号 j に関する帰納的な証明を与える。

† $1 \leq i_2 < 2$ であることに注意。

(Step 1) $j = 2$ とする。(3.24) より， $S_{i_2 2} = S_{12} > 0$ である †。

(Step 2) $j < \ell$ について， $S_{kt} > 0, k = 1, 2, \dots, t-1, t = 2, 3, \dots, j$ が成

立っていると仮定する。 $j + 1$ について, (3.24) よりある番号 $i_{j+1} (\leq j)$ が存在して $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ である。任意の $i, i < i_{j+1}$ について仮定により, $S_{ii_{j+1}} > 0$ であるから, 連鎖ルールより $S_{ij+1} > 0$ である[†]。従って, $i_{j+1} = j$ の場合には,

$$S_{ij+1} > 0, \text{ for all } i < j + 1 \quad (3.25)$$

となる。次に $i_{j+1} < j$ のケースを考察する。 $i_{j+1} < i < j$ となる財 i については仮定により, $S_{ij} > 0$ であり, さらに, $S_{i_{j+1}j} = S_{ji_{j+1}} > 0$ かつ $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから, 連鎖ルールより $S_{ij+1} > 0$ である。最後に, $S_{i_{j+1}j} = S_{ji_{j+1}} > 0, S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから, 再び連鎖ルールによって, $S_{jj+1} > 0$ に至る。これは, (3.25) がどのようなケースについても成立することを意味する。

(Step 3) 以上の論証によって, あらゆる 2 財の連関性は代替関係である。■

代替財に関するヒックス・森嶋の連鎖ルールをすべての財に適用できるかどうかには議論の余地がある。適用できる範囲が広ければ代替関係は補完関係に優越するようになるであろう。このようにして, 代替関係の優越性 substitution dominancy が主張される。

市場需要に関する性質

これまでの議論では家計の数は 1 であった。何人かの家計が存在する経済を想定してみよう。どの家計でも代替関係は優越するということが代替関係の優越性であった。市場需要関数 market demand function とは各家計の個別需要の合計である。第 k 家計の第 j 財への需要関数を $x_j^k(p, I^k)$ とするとき, 家計の数が m であれば,

$$x_j(p) = x_j^1(p, I^1) + x_j^2(p, I^2) + \cdots + x_j^m(p, I^m)$$

が第 j 財の市場需要である。ここで, I^k は第 k 家計の所得である。

第 i 財の価格が変化したときの市場需要の変化について考えよう。定義により価格が変化したときの市場需要の変化は, 価格が変化したときの個

[†] 不等号 $S_{ii_{j+1}} > 0$ かつ $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから $S_{ij+1} > 0$ である (連鎖ルール)。

別需要の変化の合計である。価格が変化したときの個別需要の変化は代替効果と所得効果の合計である。したがって、

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial x_j^k}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^m S_{ji}^k - \sum_{k=1}^m x_i^k \frac{\partial x_j^k}{\partial I^k} \quad (3.26)$$

＝代替項の合計 + 所得項の合計

となる。 S_{ji}^k は第 k 家計の第 i 財価格が変化した時の第 j 財の需要におよぼす代替効果である。同様に $-x_i^k \partial x_j^k / \partial I^k$ は所得効果である。

まず $j \neq i$ として上の式を考察してみよう。代替関係の優越性があれば、 $S_{ji} (i \neq j)$ のほとんどは正值であろう。従って、(3.26) 式の右辺第1項は大きな正の値になると予想できる。次に (3.26) 式の右辺第2項について考察しよう。ある財が下級財であるか上級財であるかは、家計によって異なるであろう。家計全員がある財を下級財、あるいは、上級財と思うのは少ないであろう。右辺第2項は家計の数だけの合計であるから、所得効果は家計の間で相殺され、平均的な値に落ち着くことになる。社会全体で見ると、代替効果の合計が所得効果の合計を上回るという傾向を持つようになるのである。つまり、(3.26) 式の左辺は正值となる傾向を持つであろう。定義3.1はある財が他のある財の粗代替財であることの、1人の家計にとっての定義である。これを参考にして、定義3.1の中の「需要」を「市場需要」で置き換えることによって、市場全体での粗代替財を定義できる。すると、たいていの財は他の財の市場全体での粗代替財となるであろうと予想できる。

あらゆる財が他の財の、市場全体で粗代替財であると仮定して、経済の理論を構築することには十分な理由があるようである。

次に、 $j = i$ の場合を考察しよう。法則2より S_{ii} はいつも負の数である。(3.26) 式の右辺第1項は、各家計について負値であるから、絶対値の大きい負の数であると考えてよい。右辺第2項は、すでに考察したように、相殺されて社会的に平均的な値になるであろう。すると、(3.26) 式の左辺は、たいていの場合、負値となると予想できる。このようにして、市場全体で、『価格が下がると需要が増加する [(3.26) の左辺 < 0] (需要曲線の右下がり性)』が成立することになる。この性質を需要法則 law of demand

とよぶ¹³。

需要法則が成立つような経済を想定することにも，充分な理由があるようである。

3.6 数学付録

微分に関する付録

定義 3.6 実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ において微分可能 (differentiable at x) であるとは，任意の $h = (h_1, \dots, h_n)$ に対して，ある定数 a_1, \dots, a_n と関数 $o(x, h)$ が存在して，

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n a_i h_i + o(x, h)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ ならば } \frac{o(x, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

が成立することである。

このとき， a_j を微分係数あるいは f の x における微分という。ここで，上の第2式の $h \rightarrow 0$ とは “0 に収束する任意の点列 $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ ” を指すものである。したがって，第2式は

$$h^\nu \rightarrow 0 \text{ となる任意の点列 } h^\nu, \nu = 1, 2, \dots \text{ について，}$$

$$o(x, h^\nu) / \|h^\nu\| \rightarrow 0 \text{ が成立する}$$

という要請である¹⁴。

もし関数 f が定義域のあらゆる点で微分可能なら，単に微分可能 differentiable という。 f が微分可能なら，微分係数 a_j は x に依存する。つま

¹³連続体上に多くの経済主体が存在する巨大経済 Large Economy で需要法則を研究しているものに，Hildenbrand, W. (1983) “On the ‘Law of Demand’,” *Econometrica*, Vol.51, No.4, 997-1019. がある。

¹⁴もちろん言う迄もなく $\|h^\nu\| \neq 0, \forall \nu$ である。

り、 x が変われば微分係数は変化するため、 x の関数となる。これを

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

と表わし、導関数と呼ぶ。あらゆる導関数が連続であれば、 f を連続微分可能 continuously differentiable という。導関数が微分可能であれば、二回微分可能 twice differentiable であるという。

微分の操作においては、 h の選択の任意性が重要である。たとえば、関数 f を \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数として、

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \text{if } x > 0 \\ &= -x & \text{if } x \leq 0 \end{aligned}$$

であるとする。 $h > 0$ ならば、

$$f(0+h) = f(0) + 1 \times h + 0$$

$h < 0$ ならば、

$$f(0+h) = f(0) - 1 \times h + 0$$

となって、微係数が確定せず、微分可能ではない。

また、関数の定義域が限られている場合に微分をどう考えるかということもある。いま、定義域を X と書き、 $x \in X$ とする。 x が X の内点 interior point であれば、 h の任意性はさほど問題にならない。なぜなら、 $h^\nu \rightarrow 0$ であるから、 ν が十分大きければ $x + h^\nu \in X$ となるからである。一方、 x が X の境界点 boundary point であるならば、そのようなことは望めない。この時は、境界点 x に収束するような内点の列 $x^\nu \in X$, $\nu = 1, 2, \dots$ を考えて、その各々における微分 $\partial f(x^\nu)/\partial x_j$ の極限を考える。その極限がどの内点の列についても同一であれば、微分可能といい、その極限を x における微分という。

[注意] このような境界点での微分の定義は必ずしも一般的ではない。論文等で用いる時には「内点からの極限で境界点での微分を定義する」と明記すべきである。

極大値, 近傍, 内点, 境界点

定義 3.7 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が点 x において増加的 increasing であるとは, 任意の $x' (x' \geq x, x' \neq x)$ について $f(x') \geq f(x)$ が成立することである。もし最後の不等号が厳密な不等号で成立すれば x において厳密に増加的 strictly increasing であるという。定義域のどの点においても (厳密に) 増加的であるなら, f は (resp. 厳密に) 増加的であるという。

定義 3.8 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ において, $f(x^*)$ が極大値 local maximum であるとは, x^* のある近傍 U が存在して, 任意の $x \in U$ について $f(x^*) \geq f(x)$ が成立することである。

定義 3.9 $U \subset \mathbb{R}^n$ が x^* の近傍 neighborhood であるとは, ある正の数 ε が存在して, $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x^*\| < \varepsilon\} \subset U$ となることである。

定義 3.10 $x^* \in \mathbb{R}_+^\ell$ が第 1 章の問題 (2.1) の制約付きの極大値であるとは, x^* のある近傍 U が存在して, 任意の $x \in U \cap \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid px \leq I\}$ について $u(x^*) \geq u(x)$ が成立することである。

定義 3.11 x が集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の内点 interior point であるとは, x のある近傍 U が存在して, $U \subset X$ が成立することである。 b が集合 X の境界点 boundary point であるとは, b の任意の近傍 V について $X \cap V \neq \emptyset$ かつ $(\mathbb{R}^n \setminus X) \cap V \neq \emptyset$ となることである[†]。

[†] 集合 $\mathbb{R}^n \setminus X$ は $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin X\}$ のことと約束される

ヤングの定理

関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が二回微分可能ならば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ for any } i, j$$

が成立する。

合成関数の微分

$n+1$ 個の関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g^j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ を微分可能とする。ここで,

入谷・久我『数理経済学入門』165page 定理 7.2 参照。

入谷・久我『数理経済学入門』page 166 参照。

$$h(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^1(x_1, \dots, x_k), \dots, g^n(x_1, \dots, x_k))$$

によって定義される関数 h を合成関数 composite function という。いま、 $y_i = g^i(x_1, \dots, x_k), i = 1, 2, \dots, n$ と書くと、

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n) \times \frac{\partial g^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k), j = 1, 2, \dots, k$$

が成立する。

テーラーの定理

f を定義域が \mathbb{R}^n 値域を \mathbb{R} とする二回微分可能な関数とする。任意の $x, h \in \mathbb{R}^n$ に対して、ある θ ($0 < \theta < 1$) が存在して、

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x + \theta h)$$

が成立する¹⁵。

極大値の必要条件

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を二回微分可能とする。 f が $x = x^*$ で極大値（最大値でもよい）を持つ必要条件是 (i) $df(x^*)/dx = 0$, (ii) $d^2f(x^*)/dx^2 \leq 0$ が成立することである。

極大値の十分条件

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を二回連続微分可能とする。 f が $x = x^*$ で極大値を持つ十分条件は (i) $df(x^*)/dx = 0$, (ii) $d^2f(x^*)/dx^2 < 0$ が成立することである。

上述の二つの定理はテーラーの定理を用いれば容易に証明できる（各自試みよ）。

¹⁵ 入谷・久我 『数理経済学入門』 page 170 参照。

陰関数定理

経済学の基本的用具として、陰関数定理 implicit function theorem がある。経済学の応用分野において、陰関数定理は極めて重要で、この定理を用いない分野はほとんどない。ある意味では、ラグランジュ法による必要条件の導出とその必要条件を陰関数定理を適切に用いることによって解の性質を抽出することができれば、経済学のプロとしての技量の基礎があると言って過言ではない。本章で代替項と所得項の分解をいささか古典的な手順に従って解説をしたのは¹⁶、陰関数定理の利用の典型例となっているからに他ならない。

定理 3.4 [陰関数定理 (implicit function theorem)][†]

関数 $g(x, y) = (g^1(x, y), g^2(x, y), \dots, g^n(x, y))^t$ を \mathbb{R}^m の点 \tilde{x} の近傍 $M_1(\tilde{x})$ と \mathbb{R}^n の点 \tilde{y} の近傍 $M_2(\tilde{y})$ とで連続とし、

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, \dots, 0)^t$$

とする。つまり、 \tilde{y} は連立方程式 $g(\tilde{x}, y) = (0, \dots, 0)^t$ の解であるとする。 $g(\cdot, \cdot)$ は $y \in M_2(\tilde{y})$ について連続的に微分可能で、 (\tilde{x}, \tilde{y}) においてヤコビ行列式 (Jacobian determinant) がゼロでない、すなわち、

$$\begin{vmatrix} g_1^1 & \cdots & g_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^n & \cdots & g_n^n \end{vmatrix} \neq 0, \quad g_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial g^i(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

とする。このとき $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ の近傍 $N_1(\tilde{x})$ と $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ の近傍 $N_2(\tilde{y})$ 、さらに、 $N_1(\tilde{x})$ から $N_2(\tilde{y})$ への写像 $\phi(x) : N_1(\tilde{x}) \rightarrow N_2(\tilde{y})$ が存在して $\tilde{y} = \phi(\tilde{x})$ 、かつ、任意の $x \in N_1(\tilde{x})$ について $g(x, \phi(x)) = 0$ が成立する。もし、 $g(x, y)$ が (x, y) について k 回連続微分可能であれば、 $\phi(x)$ は k 回連続微分可能である。

[†] 入谷・久我『数理経済学入門』第 8 章参照。

¹⁶ 双対的な手法で所得項と代替項を分解するのが現代的な方法であろう。

第4章 凸解析による接近

前章で考察したことは、第2章の問題 (2.1) の解の近傍での議論であった。例えば、陰関数定理を用いた需要関数の連続性はやはり局所的にしか与えられていない。この章では需要関数の連続性を大域的に扱う方法を紹介する。本章においても消費者の問題 (2.1) をキーにして議論が展開するが、すべての価格と所得は正であり、効用関数に関して局所非飽和が成立し、連続かつ単調であると仮定する。

4.1 準凹性

最も重要な概念は効用関数の準凹性である。効用関数の準凹性は、直感的には2時限の無差別曲線が原点に向かって凸であることを表現するものである。

次の定義を準備する。

定義 4.1 効用関数 $u(x), x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が準凹 quasi concave であるとは、任意の $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+^\ell$ 、任意の $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ について、

$$u(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \min(u(x^1), u(x^2))$$

が成立することである。

定義 4.2 \mathbb{R}^n の部分集合 X が凸集合 convex set であるとは、 X の任意の二点 $x, x' \in X$ と任意の $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ に対して、

$$\lambda x + (1 - \lambda)x' \in X$$

が成立することである。

問題 準凹関数，凸集合の定義を図によって直観的に把握しなさい。

準凹関数の定義域は凸集合でなければならないことに注意せよ。上では効用関数の定義域が \mathbb{R}_+^ℓ であり凸集合であるから，それを明示していない。

次の定理は準凹関数の理解に役立つであろう。

定理 4.1 関数 $u(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が準凹関数であることの必要十分条件は任意の実数値 v に対して，集合

$$C_v \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(x) \geq v\}$$

が凸集合であることである。

[証明] (必要性) $u(\cdot)$ を準凹関数とする。 v を任意の実数値とする。 $x, x' \in C_v$, $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ とすれば， u の準凹性によって，

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min(u(x), u(x'))$$

である。 $\min(u(x), u(x')) \geq v$ は自明であるから， $u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq v$ したがって， $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in C_v$ である。

(十分性) 任意の実数値 v に対して C_v が凸集合であるとする。任意の二点 $x, x' \in \mathbb{R}_+^\ell$ と任意の実数値 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ を選んでおく。いま， $v = \min(u(x), u(x'))$ とすれば， $x, x' \in C_v$ である。 C_v は凸集合だから， $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in C_v$ である。したがって，

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq v = \min(u(x), u(x'))$$

となる。これは u が準凹関数であることを意味する。■

この定理によって，「無差別図表が原点に向かって凸であること」が効用関数の準凹性によって十全に表現されることが判る。

定義 4.3 効用関数 $u(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が狭義準凹 strictly quasi concave であるとは，任意の $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+^\ell$ ，任意の $\lambda, 0 < \lambda < 1$ について，

$$u(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) > \min(u(x^1), u(x^2))$$

が成立することである。

定理 4.2 効用関数 u が厳密に準凹であるならば，第 1 章の (2.1) の解は一意的 unique である。

[証明] いま (2.1) に異なる二つの解 x, x' が存在したとする。つまり， $u(x) = u(x')$ かつ $px = px' = I$ である。狭義準凹性から，

$$u\left(\frac{x}{2} + \frac{x'}{2}\right) > u(x) = u(x')$$

が成立する。かつ， $p(x/2 + x'/2) = I$ も自明である。これは x, x' が解であることに矛盾する。従って (2.1) の解は一意的である。■

前章では需要関数となることは必ずしも明らかではなかった¹。この定理によって，効用関数に狭義準凹性があれば，需要は全域的に関数として取り扱うことができる。このようにして，任意の $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ に対して，需要 $x(p, I) = (x_1(p, I), \dots, x_\ell(p, I))$ が定義できる。これは需要関数 demand function である。

定理 4.3 (需要関数の連続性) 効用関数 $u(\cdot)$ が狭義準凹かつ連続であれば，需要関数 $x(p, I)$ ， $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^\ell \times \mathbb{R}_{++}$ は連続である。

[証明] 価格と所得 $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^\ell \times \mathbb{R}_{++}$ を任意に選んでおく。 (p^ν, I^ν) を (p, I) に収束する価格と所得の列とする[†]。仮定により，任意の ν について， $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ かつ $I^\nu \in \mathbb{R}_{++}$ であるとしてよい。価格と所得が (p^ν, I^ν) であるときの需要，つまり，(2.1) の解を x^ν とする。

[†] 連続性の定義 1.6 を参照せよ。

$[a, b]$ は実数の閉区間で集合で書けば $\{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ のことである。

$$x^\nu \in \left[0, \frac{\sup\{I^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}{\inf\{p_1^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}\right] \times \dots \times \left[0, \frac{\sup\{I^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}{\inf\{p_\ell^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}\right],$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

である。この右辺はコンパクト集合であるから，収束する部分列が存在する。その収束先を x^* とする。

¹ 任意の解において，前章での十分条件（あるいは正則条件）が成立すれば，解は有限個であることがわかる。Debreu, G. (1970), "Economies with a finite set of Equilibria," *Econometrica*, Vol.38, No.3, 387-392 参照。

いま, 予算制約を満たす消費の組み合わせ $B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid px \leq I\}$ を定義する。同様に, 集合列 $B^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p^\nu x \leq I^\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots$ を定義する。 $x^* \in B$ であることに注意しておく。任意の $x \in \mathbb{R}_+^\ell$, $px \leq I$ を1つ選んでおく。 $x = 0$ であれば, $x \in B^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$ であることは自明である。 $x \neq 0$ であれば, $\varepsilon > 0$ を任意に選んでおくと

$$0 \leq x_\varepsilon \leq x, \quad px_\varepsilon < I, \quad \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

を成立させる x_ε が存在する。積の連続性より, ある ν^0 が存在して, $\nu > \nu^0$ であれば, $p^\nu x_\varepsilon \leq I^\nu$ が成り立つ。これは, †

$$u(x_\varepsilon) \leq u(x^\nu)$$

を意味する。 $\nu \rightarrow \infty$ とすれば, u の連続性より,

$$u(x_\varepsilon) \leq u(x^*)$$

である。この不等号は任意の ε について成立するから,

$$u(x) \leq u(x^*)$$

となる。 x は B の任意の要素であるから, x^* は価格と所得が (p, I) の時の需要に他ならない‡。

以上の議論は元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ の任意の収束する部分列について成立する。したがって, これまでの議論を繰り返すと, その収束先 x^{**} も価格と所得が (p, I) の時の需要である。定理3.2によって $x^{**} = x^*$ であるから, 元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ の任意の収束する部分列の極限は x^* 自身である。これは, 元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ が x^* 荷収束することを意味する ††。しかも, x^* が予算集合 B 上で効用を最大化することより, 需要関数の連続性が示された。■

定義 4.4 \mathbb{R}^n の凸集合 X 上 ††† で定義される実数値関数 f が凹関数 concave function であるとは, 任意の $x, y \in X$ かつ任意の $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ について

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

† 消費ベクトル x_ε は価格と所得が (p^ν, I^ν) のときの予算を満たしているのでその効用は最大値 $u(x^\nu)$ を越えない。

‡ 上の下線部に着目せよ。

†† 各自証明せよ。背理法を用いれば容易である。

††† 集合 X が凸集合であることを明記していることに注意。

が成立することである。また、 $-f$ が凹関数となる時、 f を凸関数 convex function であるという。

凹関数は準凹関数であるが、逆は必ずしも正しくない。したがって効用関数を凹関数と仮定することは大変制約的であることに注意をしておこう²。

4.2 準凹関数の必要条件と十分条件

前節で効用関数の準凹性が極めて良好な性質を需要関数に付与することが示された。準凹関数の性質を知悉しておくことは極めて重要である。ここでは、準凹関数の必要条件や十分条件を見ておこう。前節の定理 4.1 は微分可能性を仮定しないで得られる必要十分条件であった。ここでは、微分可能性を前提とした諸条件を提示する。

定理 4.4 関数 $u : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ を定義域の内点において連続微分可能とする。 u が準凹関数である必要十分条件は、任意の $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$, $y \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について、

$$u(x) \geq u(y) \Rightarrow \nabla u(y)(x - y) \geq 0 \quad (4.1)$$

が成立することである。ここで、

$$\nabla u(y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right)$$

である[†]。

[†] ∇ はナブラと読む。

²Negishi, T. (1960) "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica*, 92-97.

は効用関数を凹関数に限定することによって、競争均衡の存在について新しい証明を与えている。この論文ではパレート効率性と個人主義的社会的厚生関数との関係が存在証明の中で統一的にとらえられていて、大変重要な意義を持っている。近年になって、Negishi のアイデアは MasColelle, A. (1986) "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices," *Econometrica*, 1039-1054.

によって continuum many traders の枠組みで再構築されている。

[証明](必要性) u を準凹関数とする。 $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$, $y \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について, $u(x) \geq u(y)$ が成立したとする。任意の $\lambda, 0 < \lambda < 1$ について,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq u(y)$$

である。一方, テーラー展開を利用して, ある $\theta, 0 < \theta < 1$ が存在して,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= u(y + \lambda(x - y)) \\ &= u(y) + \lambda \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(\lambda x + (1 - \lambda)y) - u(y) = \lambda \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \\ &0 \leq \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \end{aligned}$$

である。この最後の式において, λ をゼロに近づけてやると, u が連続微分可能であるから,

$$0 \leq \nabla u(y)(x - y)$$

に至る。

(十分性) 略 ■

定理 4.5 効用関数 $u(x), x \in \mathbb{R}_+^\ell$ を連続, 連続微分可能, かつ準凹であるとする。 $p_i > 0, i = 1, 2, \dots, \ell, I > 0$ を定数とする。ある $x^* \in \mathbb{R}_+^\ell$ と $\lambda (> 0)$ について,

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*) = \lambda p_j > 0, j = 1, 2, \dots, \ell \quad (4.2)$$

$$p_1 x_1^* + \dots + p_\ell x_\ell^* = I \quad (4.3)$$

が成立すれば, x^* は効用最大化問題:

$$\max u(x) \quad \text{subject to} \quad p_1 x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \leq I$$

の解である。

[証明] $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ を $px < px^*$ を満たす任意の消費ベクトルとする。この両辺に $\lambda > 0$ をかければ, (4.2) によって,

$$(x - x^*)\nabla u(x^*) < 0$$

である。 u は準凹関数であるから, 定理 4.4 の (4.1) 式の対偶を用いて,

$$u(x) < u(x^*)$$

である。次に, $px = px^*$ となる任意の消費ベクトル x について考察する。ある点列 $px^\nu < px^*$, $x^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $\nu = 1, 2, \dots$ をとることができて, $\nu \rightarrow \infty$ のとき $x^\nu \rightarrow x$ 満たすようにすることができる。したがって, 上で示したことから,

$$u(x^\nu) < u(x^*), \nu = 1, 2, \dots$$

である。 $\nu \rightarrow \infty$ を図れば, u の連続性から,

$$u(x) \leq u(x^*)$$

が得られる。したがって, x^* は効用最大化問題の解である。■

次に, 縁つきヘッセ行列と準凹関数の関係について検討するが, そのために次の準備をしておく。

補助定理 4.1 ある n 次元ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ と n 行 n 列行列 A について,

$$\forall x (px = 0 \Rightarrow xAx^t \leq 0)$$

が成立するならば,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & p_1 & \cdots & p_k \\ p_1 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

となる。

補助定理 4.2 ある n 次元ベクトル $p = (p_1, \dots, p_n)$ と n 行 n 列行列 A について,

$$\forall x (px = 0 \text{ and } x \neq [0] \Rightarrow xAx^t < 0)$$

の必要十分条件は

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & p_1 & \cdots & p_k \\ p_1 & a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_k & a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} > 0, \quad k = 2, 3, \dots, n$$

となる。

上述の補助定理 4.1 では必要条件のみが語られていること、つまり、十分条件にはならないに注意が必要である。一方、補助定理 4.2 では必要十分条件になっている。

さらに、一変数の極小値問題の十分条件についても前章の極大値の必要条件から、次の補助定理は明らかである。

補助定理 4.3 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を二回連続微分可能とする。 f が $x = x^*$ で極小値を持つ必要条件は (i) $df(x^*)/dx = 0$, (ii) $d^2f(x^*)/dx^2 \geq 0$ が成立することである。

ここで、次の記号法を導入しておく。 $f(x_1, \dots, x_n)$ が 2 回微分可能であるとき、その 2 次微分を行列として並べたもの (ヘッセ行列) を

$$\nabla^2 f(x) = \begin{pmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

と書く。

定理 4.6 X を \mathbb{R}^n の凸開集合とする。 $f(x)$ を X 上で定義された 2 回連続微分可能な実数値関数とする。 $f(x)$ が準凹関数であることの必要条件是任意の $x \in X$ にたいして,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (4.4)$$

となることである。ここで, $f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial f / \partial x_i(x)$, $f_{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i(x)$ である。

逆に任意の $x \in X$ について,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} > 0, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (4.5)$$

であれば, $f(\cdot)$ は狭義準凹関数である。したがって準凹関数である。

[証明] 必要性を証明する。 $x \in \mathbb{R}_{++}^n$ を任意に選んでおく。 $p = \nabla f(x)$ とする。 $p = [0]$ である場合は, (4.4) の左辺の行列式は常にゼロであるので, 定理は成立する。したがって, $p \neq [0]$ の場合だけを考察すればよい。 $py < px$ であれば, 定理 4.4 の (4.1) 式の対偶によって,

$$f(y) < f(x)$$

である。 f の連続性より, これは

$$py \leq px \text{ となる任意の } y \text{ にたいして } f(y) \leq f(x)$$

である。これは, x が $\{y \in X \mid py \leq px\}$ の中で f を最大化することを示している。いま, h を $ph = 0$ となる任意のものとする。 x は開集合 X

の点であるから，十分小さな $\mu > 0$ にていして， $x + \mu h \in X$ とできる。
 テーラー展開によって， θ ($0 < \theta < 1$) が存在して

$$\begin{aligned} f(x + \mu h) &= f(x) + \mu h \nabla f(x) + \frac{\mu^2}{2} h \nabla^2 f(x + \theta h) h^t \\ &= f(x) + \frac{\mu^2}{2} h \nabla^2 f(x + \theta \mu h) h^t \end{aligned}$$

となる。 $f(x) \geq f(x + \mu h)$ であることを考慮すると，

$$h \nabla^2 f(x + \theta \mu h) h^t \leq 0$$

である。これは $ph = 0$ を満たす任意の h について成立し， $p = \nabla f(x)$ であるから，定理 4.1 より，

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x + \theta \mu h) & \cdots & f_{1k}(x + \theta \mu h) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x + \theta \mu h) & \cdots & f_{kk}(x + \theta \mu h) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 2, \dots, n$$

である。ここで， $\mu \rightarrow 0$ とすれば， f が2回連続微分可能であるから，

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k = 2, \dots, n$$

を得る。

(十分条件)いま， $x, y, x \neq y$ を任意に X から選んでおく。一般性を失わず， $f(y) \leq f(x)$ とする。以下，3つのステップに分けて証明をする。

Step 1 次の関数を定義する。 $\lambda \in [0, 1]$ にたいして，

$$x(\lambda) = \lambda y + (1 - \lambda)x, \quad F(\lambda) = f(x(\lambda))$$

とする。\$X\$ は凸集合であるから、\$x(\lambda) \in X\$ である。合成関数の微分によって、

$$\begin{aligned} F'(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(\lambda))(y_i - x_i) \\ &= \nabla f(x(\lambda))(y - x) \\ F''(\lambda) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x(\lambda))(y_i - x_i)(y_j - x_j) \\ &= (y - x) \nabla^2 f(x(\lambda))(y - x)^t \end{aligned}$$

である。

Step 2 \$F\$ が \$\lambda^*\$ (\$0 < \lambda \le 1\$) においても極小値を達成したならば、補助定理 4.3 より、

$$F'(\lambda^*) = 0 \text{ かつ } F''(\lambda^*) \geq 0$$

が成立する。よって、Step 1 で得られたことから、

$$\nabla f(x(\lambda^*))(y - x) = 0 \text{ かつ } (y - x) \nabla^2 f(x(\lambda^*))(y - x)^t \geq 0$$

が成立する。この定理の前提条件では、補助定理 4.2 によって、任意の \$z \in X\$ について、

$$\forall h (\nabla f(z)h = 0 \text{ かつ } h \neq [0] \Rightarrow h \nabla^2 f(z)h^t < 0)$$

であることがわかる。したがって、これと極小値のための必要条件を見比べると、\$F(\lambda)\$ が \$0 < \lambda < 1\$ において極小値は存在し得ない。

Step 3 以上によって、\$F(\lambda)\$ は \$\lambda \in (0, 1)\$ において最小値を持ち得ない。これは、\$f(y) = F(1) > f(x) = F(0)\$ であることを考え合わせると

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) = F(\lambda) \geq f(x) = \min(f(x), f(y)), \forall \lambda \in [0, 1]$$

を意味している。これは \$f\$ が準凹関数であることを示している。■

定理 4.7 X を \mathbb{R}^n の凸開集合とする。 $f(x)$ を X 上で定義された2回連続微分可能な実数値関数とする。 $f(x)$ が凹関数であることの必要十分条件は任意の $x \in X$ と $h \in \mathbb{R}^n$ にたいして、

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \leq 0 \quad (4.6)$$

となることである。

(4.6) の必要十分条件は、任意の k 個の異なるインデックス $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ について

$$(-1)^k \begin{vmatrix} f_{i_1 i_1}(x) & \cdots & f_{i_1 i_k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_k i_1}(x) & \cdots & f_{i_k i_k}(x) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.7)$$

が成立することである。ここで、 $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ である。

4.3 支出関数

いま、効用関数 u が \mathbb{R}_+^ℓ で定義される連続かつ単調な準凹関数で、 \mathbb{R}_{++}^ℓ 上では狭義単調かつ狭義準凹関数であり[†]、二回連続微分可能であるとする。

[†] このように境界を除いて狭義準凹としているのはなぜかを考えてみよう。

$$\partial \mathbb{R}_+^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \text{ある } i (1 \leq i \leq \ell) \text{ について } y_i = 0\}$$

と定義する。さらに、

$$u(y) = \inf\{u(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^\ell\}, \text{ if } y \in \partial \mathbb{R}_+^\ell \quad (4.8)$$

が成立するものとする。これは、正の象限 \mathbb{R}_{++}^ℓ の中にある点を通る無差別曲線はどの軸とも重ならないことを意味している。さらに、 \mathbb{R}_{++}^ℓ における u の微分は正値であると仮定する。

\bar{u} を一つの実数とする。集合

$$I_{\bar{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(x) \geq \bar{u}\}$$

を定義する。集合 $I_{\bar{u}}$ は凸集合かつ閉集合である。凸集合であることは u の準凹性から、閉集合であることは u の連続性から従う。ここで、 $I_{\bar{u}}$ が非空である $\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}^{\ell}$ について $\bar{u} = u(\bar{x})$ であると仮定する。このとき、 $y \in \partial \mathbb{R}_{+}^{\ell}$ となる消費ベクトル y について、 $y \notin I_{\bar{u}}$ であることに注意しておく[†]。

[†] 各自証明を試みなさい。

そこで、問題

$$\min_x p_1 x_1 + \cdots + p_{\ell} x_{\ell} \quad \text{subject to } x \in I_{\bar{u}} \quad (4.9)$$

を考察する。この問題の解を $I(p_1, \dots, p_{\ell}, \bar{u})$ と書く。これを価格と効用水準の関数と見て支出関数 expenditure function と呼ぶ。前章において補償所得を考察したが、現在のものがいま一つの表現である。

定理 4.8 関数 $I(p_1, \dots, p_{\ell}, \bar{u})$ は (p_1, \dots, p_{ℓ}) について凹関数である。

[証明] $p^k \stackrel{\text{def}}{=} (p_1^k, \dots, p_{\ell}^k)$, $k = 1, 2$ を任意の正のベクトルとする。任意の λ , $(0 \leq \lambda \leq 1)$ に対して、 $p^3 = \lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2$ とする。 p^k に対応する (4.9) の解を x^k , $k = 1, 2, 3$ とする。よって、

$$\begin{aligned} I(p^3, \bar{u}) &= p^3 x^3 \\ &= \lambda p^1 x^3 + (1 - \lambda) p^2 x^3 \\ &\leq \lambda I(p^1, \bar{u}) + (1 - \lambda) I(p^2, \bar{u}) \end{aligned}$$

である。■

補助定理 4.4 任意の正の価格 p 任意の実数 \bar{u} を固定する。 $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ であれば、問題 (4.9) の解は $I_{\bar{u}}$ に存在する。したがって支出関数は存在する。

[証明] 仮定によって $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ であるから、 $x \in I_{\bar{u}}$ となる $x \in \mathbb{R}_{+}^{\ell}$ が存在する。 $p > 0$, $I_{\bar{u}} \subset \mathbb{R}_{+}^{\ell}$ であるから、実数の集合 $S \stackrel{\text{def}}{=} \{px \mid x \in I_{\bar{u}}\}$ は非空で下に有界である (0 が一つの下界である)。よって S には下限 s が存在する[†]。 $s = px$ である場合は解の存在は自明である。 $s < px$ の場合を考察しよう。いま、 ν を任意の自然数とすると、 $s + 1/\nu$ は下限ではない。

[†] 下に有界な実数の集合には下限が存在する：実数の基本的な性質。

よって或る $x^\nu \in I_{\bar{u}}$ が存在して,

$$s \leq px^\nu \leq s + \frac{1}{\nu}$$

が成立する。このようにして, $I_{\bar{u}}$ の中に列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ がとれる。十分大きな ν ($1/\nu < px - s$) について, $px^\nu \leq px$ である。よって, $x_j^\nu < px/p_j$ である。よって, x^ν は収束する部分列を持つ。収束先を x^* とすると, これまでの議論より

$$s = px^*$$

が成立する。さらに, $u(x^\nu) \geq \bar{u}$ は任意の ν について成立するから, $u(\cdot)$ の連続性から $u(x^*) \geq \bar{u}$ したがって, $x^* \in I_{\bar{u}}$ である。よって下限 s は最小値であり, (4.9) の最小値は存在する。最小値は一意であることは明らかであるから, $I(p, \bar{u})$ は関数である。■

【注意】定理 4.8, 補助定理 4.4 には, ここで仮定されている条件のなかで u の連続性と $I_{\bar{u}}$ の非空性以外は必要ではない。 u の連続性も問題 (4.9) を最小化ではなくて, 下限を見つける問題, すなわち,

$$\inf_x p_1x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \quad \text{subject to } x \in I_{\bar{u}}$$

とすれば, 必要ではない。ただし, 補助定理 4.4 の「 $x^* \in I_{\bar{u}}$ 」は必ずしも成立せず, 「 $x^* \in \mathbb{R}_+^\ell$ 」で成立する。したがって定理 4.8, 補助定理 4.4 は極めて一般的に確立される。したがって, $I(p, \bar{u})$ が p の連続関数であることは効用関数の狭義準凹性に係わらない(各自試みよ)³。さらに, 補助定理 4.4 において, 効用関数が狭義準凹であれば, (4.9) の最小値を与える x は一意であることを示すことは易しい(各自試みよ)。

問題 仮定 (4.8) のもとでは, 価格列 $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell, \nu = 1, 2, \dots$ について $\nu \rightarrow \infty$ の時 $p^\nu \rightarrow p \in \mathbb{R}_+^\ell$ とする。この時,

$$p_j = 0 \text{ ならば } x_j^i(p^\nu) \rightarrow \infty$$

³ p に関する連続性は定理 4.8 の含意でもある。Rockafellar, R.T. *Convex Analysis* (1970, Princeton University Press) の 82 page には, 次の定理がある。

Theorem 10.1. A convex function f on \mathbb{R}^n is continuous relative to any relatively open convex set C in its effective domain, in particular relative to $\text{ri}(\text{dom}f)$.

つまり, 「凸関数や凹関数は定義域の境界を除けば連続である」という内容が成立するのである。

となることを示しなさい。

補助定理 4.5 条件 (4.8) を仮定する。任意の正の価格 p を固定する。

$$\bar{u} > \inf\{u(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^\ell\}$$

であれば, 問題 (4.9) の解は \mathbb{R}_{++}^ℓ に存在する。

[証明: 略]

ここで, 効用関数の 2 回連続微分可能性を仮定する。さらに, $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ を仮定する。問題 (4.9) は不等号制約のある最小化問題であるが, 効用関数が単調であることが仮定されているから,

$$\max -p_1x_1 - \cdots - p_\ell x_\ell \quad \text{subject to } u(x) = \bar{u}$$

と同値である。よって 2 章で紹介した定理 3.1 (ラグランジュの未定乗数法) を用いることができる。ラグランジュ関数を

$$L(x, \mu) = -p_1x_1 - \cdots - p_\ell x_\ell + \mu(u(x) - \bar{u})$$

とする。補助定理 4.4 より問題 (4.9) には解があるから, 次の必要条件を得る。すなわち, ある μ^* が存在して, μ^* と解 $x^* = (x_1^*, \dots, x_\ell^*)$ は

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_\ell) - \bar{u} &= 0 \\ \mu \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - p_i &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

を満たす。ここで, ヤコービアン[†]

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_\ell \\ u_1 & \mu u_{11} & \cdots & \mu u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & \mu u_{\ell 1} & \cdots & \mu u_{\ell\ell} \end{vmatrix} = (\mu)^{\ell-1} \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \cdots & u_\ell \\ u_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

ヤコービアン Jacobian と言う時はヤコビ行列式 Jacobian determinant を指すことに注意。

が $x = x^*$, $\mu = \mu^*$ で成立すると仮定する。(4.5) や第2章で学んだ十分条件 (3.11) とが成立していれば, この条件が成立することに注意をしておきたい。

以上の準備によって, 陰関数定理を用いれば, $x(p, \bar{u}) = x^*$ を満たす解が局所的に微分可能な関数として得られる。したがって,

$$\bar{u} = u(x_1(p, \bar{u}), \dots, x_\ell(p, \bar{u}))$$

は p について恒等式である。 p_i に微分をして, ラグランジュ条件を考慮すると,

$$\begin{aligned} 0 &= u_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + u_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u}) \\ &= \mu p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + \mu p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u}) \end{aligned}$$

よって

$$0 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u}) \quad (4.10)$$

となる。一方, $I(p, \bar{u}) = p_1 x_1(p, \bar{u}) + \dots + p_\ell x_\ell(p, \bar{u})$ を考慮すると,

$$\frac{\partial I}{\partial p_i}(p, \bar{u}) = x_i(p, \bar{u}) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p, \bar{u})$$

よって (4.10) を考慮すれば

$$\frac{\partial I}{\partial p_i}(p, \bar{u}) = x_i(p, \bar{u}) \quad (4.11)$$

が成立する。等式 (4.11) をマッケンジーの補題 McKensie's lemma と呼ばれる。これは, 前章の (3.21) で得られたものと正確に同じである。

同様の議論が生産の理論の費用関数 cost function についても可能である。つまり, \bar{u} をある生産物の生産水準, u を生産関数とみなしてみる⁴。

⁴生産関数では準凹関数という仮定はなされないのが普通である。準凹関数では収穫逓増のケースを含んでいるからである。

すると、 $I_{\bar{u}}$ は等量線の東北部分の領域を示している。すると、問題 (4.9) は与えられた生産量 \bar{u} を生産するための最小の費用を求めるものとなる。このようにして、与えられた生産量に対して費用が定義できる。これが費用関数である。通常、費用関数は生産量の関数として書かれることが多いが、正確には、生産量と生産要素価格の関数となる。生産要素価格に関する費用関数の微分は上のマッケンジーの補題が、全く同様にして、成立する。これはマッケンジー・シェパードの補題と呼ばれる。

また、不等号制約条件付きの準凹関数の最大化は「準凹計画問題」として1つのテーマとなっている。ここでは詳しくは解説しなかったが、

- (i) Arrow, K.J., and A.C., Enthoven (1961) “Quasi-Concave Programming,” *Econometrica*, Vol.29, No.4, pp779-800.
- (ii) Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*, (New York, McGraw-Hill, 1969) (関根智明訳『非線形計画法』培風館, 1972)。

を参考すれば、有用な知識が得られる。筆者の経験からすれば、マンガサリアンは一読に値する。

第5章 交換の一般均衡

5.1 問題の設定

これまでの2, 3, 4章において, 需要関数は十分に確立された. ここでは, 最小限の一般均衡である「交換の一般均衡 general equilibrium of exchange」を解説する. 次の事実はこれまでに判明したことのまとめである.

(C): 需要関数 $x_j^i(p_1, \dots, p_\ell)$ は $(p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ において連続である.

(H): 需要関数は任意の $p \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, 任意の $\lambda > 0$ について,

$$x_j^i(\lambda p_1, \lambda p_2, \dots, \lambda p_\ell) = x_j^i(p_1, p_2, \dots, p_\ell)$$

が成立する. これは需要が価格に関してゼロ次同次であること homogeneous of degree zero を示している.

(W): 任意の $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について,

$$p_1 \left(\sum_{i=1}^n x_1^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_1^i \right) + \dots + p_\ell \left(\sum_{i=1}^n x_\ell^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_\ell^i \right) = 0$$

が成立する. これはワルラス法則である.

第3章と第4章では, 需要関数を $x_j^i(p, I)$ と書いてきた. この章では, 所得を表示していない. それは次の理由による. ここでは交換経済を考察し

ているので、第 i 家計の予算制約は、 $\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_\ell^i)$ を第 i 家計の初期保有とすれば、

$$p_1 x_1^i + p_2 x_2^i + \dots + p_\ell x_\ell^i = p_1 \omega_1^i + p_2 \omega_2^i + \dots + p_\ell \omega_\ell^i$$

と書くことができる。つまり、所得も価格 p によって決まる。このようにして、所得を需要関数の変数とせず、価格のみの関数として表しているのである。ここで、

$$\sum_{i=1}^n \omega_j^i > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

と考えることに問題はないであろう。

さらに、第2章で学んだ需要関数の価格と所得に関するゼロ次同次性は、(H)にあるように価格に関するゼロ次同次性として表される。

ワルラス法則は各家計の需要関数（個別需要関数）を予算制約に代入して得られる。第1章では企業の利潤が入っていたために必ずしも明瞭ではなかったが、ワルラス法則は家計の予算制約を合算して得られるものである。¹

(C), (H), (W) に付け加えて、次の条件を仮定しよう。

(B) : 価格の列 $p^\nu = (p_1^\nu, \dots, p_\ell^\nu) \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $\nu = 1, 2, \dots$ において、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき $p^\nu \rightarrow \bar{p} = (\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_\ell)$ であるとする。もし、ある j ($1 \leq j \leq \ell$)

¹ 個別需要関数は予算制約を満たすから、

$$p x^i(p) \leq p \omega^i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

である。これを家計について合算して、整理すると、

$$p \left(x(p) - \sum_{i=1}^m \omega^i \right) \leq 0 \quad (5.1)$$

が得られる。各家計の効用関数に局所非飽和性を仮定すれば、予算制約は等号で成立するから、(5.1) は (W) の形式で表現される。(5.1) や (W) は $\sum_{i=1}^m \omega^i$ が総供給であるから、総需要が総供給を超過する部分の価値額の合計が非正あるいはゼロであることを示している。これはワルラス法則 Walras law と呼ばれるものである。本章では (W) の形のワルラス法則を用いる。

について $\bar{p}_j = 0$ となるならば,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_j^i(p^\nu) = \infty \quad (5.2)$$

が成立する。

(B) はある財 j の価格がゼロに近づいていけば、第 j 財の総需要 (市場需要) は無限に発散する、というものである。

また、 $p \in \partial \mathbb{R}_+^\ell$ に収束する価格列 $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell, \nu = 1, 2, \dots$ について

$$p_j = 0 \text{ ならば } \lim_{\nu \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n x_j^i(p^\nu) = \infty \quad (5.3)$$

を仮定する²。これは境界条件 boundary condition と呼ばれる。

さらに、 $p \in \partial \mathbb{R}_+^\ell$ について財 k を $p_k \neq 0$ となる財とすれば、 p に収束する \mathbb{R}_{++}^ℓ 内の任意の価格列 $p^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ に対応する第 k 財の需要の列 $\sum_{i=1}^n x_k^i(p^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ には極限が存在し、その極限は価格列に依存しないと仮定する³。この性質も境界条件 (B) に含めることにしよう。

以上の性質 (C), (H), (W), (B) が成立するものとし、我々がこの章で検討したいものは、

$$\sum_{i=1}^n x_j^i(p_1^*, \dots, p_\ell^*) = \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (5.4)$$

²仮定 (4.8) のもとでは、 p に収束する価格列 $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell, \nu = 1, 2, \dots$ について、

$$p_j = 0 \text{ ならば } \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_j^i(p^\nu) = \infty$$

が成立する。これは第 4 章での読者への課題であった。本章ではこの性質が市場需要関数について成立すると仮定されている。

³収束する価格列によって極限が異なる可能性も存在する。そのような場合、 $\sum_{i=1}^n x_j(p)$ は \mathbb{R}_{++}^ℓ で関数であっても、定義域を \mathbb{R}_+^ℓ に拡張したときには、必ずしも「関数」ではなく「対応」となる。このようなとき、需要関数のより広い定義域を拡張して、需要対応を作る。需要対応は、ある価格 p の像が複数の要素を含む集合となることを許容する。Nikaido, H. (1968) *Convex Structure and Economic Theory*, Academic Press には関数を定義域と値域との積集合の中のグラフ (集合) として捉え、閉包を作る事によって「閉写像」に拡張する方法が示されている。拡張されたものは、一般には、対応である。本章では、定義域を拡張しても需要関数が連続となるような想定を採用している。この想定はいくぶん強い仮定であることに注意しておこう。

を満たす価格 $p^* = (p_1^*, \dots, p_\ell^*) \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ の存在についてである。これは需要と供給の一致をもたらす価格が存在するかどうかという問題で、「一般均衡の存在問題」と呼ばれる⁴。左辺が総需要，右辺が総供給である。生産がないために表現が非常に簡単になっているが，生産を導入してもほとんど議論は変わらない。この等式は p に関する連立方程式である。(5.4) を成立させる価格 p^* を競争均衡価格 competitive equilibrium price という。また，その時の価格と配分の組 $((x^i(p^*))_{i=1}^n, p^*)$ を競争均衡 competitive equilibrium と呼ぶ。

総需要と総供給の差を超過需要 excess demand と呼び，次のように書く。 $p \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ にたいして，

$$x_j(p) = \sum_{i=1}^n x_j^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell.$$

存在問題の解決には，次の不動点定理を用いる。

定理 5.1 (Brouwer's Fixed Point Theorem) $f: X \rightarrow X$ を \mathbb{R}_+^ℓ の非空凸コンパクト集合 S からそれ自身 S への連続関数とする。ある点 $y^* \in S$ が存在して， $f(y^*) = y^*$ が成立する。 y^* を不動点 fixed point という⁵。

5.2 競争均衡の存在

5.2.1 解決すべき課題

前節において，必要な準備は全て整った。ここで，均衡の存在問題をブラウワーの不動点定理を用いて解決するわけであるが，そのためには，いくつかの問題を解決しなければならない。それらは，

⁴ワルラス法則を (5.1) で議論する時には，需給バランスを不等号で表現した $\sum_{i=1}^n x_j^i(p) \leq \sum_{i=1}^n \omega_j^i$, $j = 1, 2, \dots, \ell$ を用いるのが自然である。

⁵不動点定理には多くのタイプがある。Broder K,C. (1985) *Fixed point theorems with applications to economics and game theory*, Cambridge University Press や Grana A. and J.Dugundji (2003) *Fixed Point Theory*, Springer を参照されたい。

- 1: 定義域の問題 超過関数は $p \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ 上で定義されている。これを凸コンパクト集合上に制限・拡張できなければならない。 \mathbb{R}_{++}^ℓ は凸であるが、開集合であり、しかも、有界でない。
- 2: 超過需要の値の問題 ある価格がゼロに収束すれば、当該の財の超過需要が無限に発散する可能性がある。上の定義域の問題を超過需要関数に連続性を保つように注意深く処理する必要がある。

である⁶。

課題1の解決のヒントは性質(H)から得られる。(H)によって、超過需要関数について、任意の $\lambda > 0$, 任意の $p = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ に対して、

$$x_j(\lambda p) = x_j(p), \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

が成立する。そこで、 $\lambda = 1 / \sum_{i=1}^{\ell} p_i$ とすれば、

$$\sum_{j=1}^{\ell} \lambda p_j = \sum_{j=1}^{\ell} \frac{p_j}{\sum_{i=1}^{\ell} p_i} = 1$$

となる。この性質に着目して、 $S \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1\}$ とするとき、超過需要関数の定義域を、

$$S^\square \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in S \mid p_j > 0, j = 1, \dots, \ell\}$$

に制限することができる。 S は単体 simplex と呼ばれる。 S^\square は凸集合で有界である。

次の作業は定義域を S^\square が閉集合でなく開集合であることから必要とされる。われわれは S^\square から定義域を凸コンパクト集合 S に拡張しよう。そのために条件(B)に着目する。 K を正の十分大きな値、すなわち、

$$K > \max \left\{ \sum_{i=1}^n \omega_1^i, \dots, \sum_{i=1}^n \omega_\ell^i \right\}$$

⁶ブラウワーの不動点定理から競争均衡の存在が示されるが、「ブラウワーの不動点定理」と「競争均衡の存在」は同値であることが知られている。第5.4にはそれを示しておいた。内容は Uzawa, H. (1962) "Competitive Equilibrium and Fixed Point Theorems, II: Walras Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem," *Economic Studies Quarterly*, Vol.8, 59-62. に依拠している。

を満たす定数とする。超過需要関数に変更を加えて、

$$\tilde{x}_j(p) = \min(x_j(p), K) \text{ if } p \in S^\square$$

とする。さらに、 $\bar{p} \in \partial S = \{p \in S \mid \text{there exists some } j \text{ such that } p_j = 0\}$ に対して、 $p^\nu \in S^\square, \nu = 1, 2, \dots$ を \bar{p} に収束する任意の列として、

$$\tilde{x}_j(\bar{p}) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} \tilde{x}_j(p^\nu), \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

と定義する。このようにすれば、 \tilde{x}_j は S 上の関数に拡張されている。

以上の解決法には注意を要する点が一つ存在する。それは、ワルラス法則が従来のように等号では成立しないことである。すなわち、 $p \in S^\square$ にたいして

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_j^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i \right) \leq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \left(\sum_{i=1}^n x_j^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i \right) = 0$$

である。したがって、任意の $p \in S$ にたいして、

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j \left(\sum_{i=1}^n \tilde{x}_j^i(p) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i \right) \leq 0 \quad (5.5)$$

という形のワルラス法則となる。次節では、これを (W) と書く。

5.3 存在証明

(C) 市場需要関数の S^\square における連続性、(W) ワルラス法則、そして、(B) 境界条件、を前提として、競争均衡の存在を示しておこう。

そこで、任意の $p \in S$ に対して、次の写像

$$\phi_j(p) = \frac{p_j + \max(\tilde{x}_j(p) - \sum_{i=1}^m \omega_j^i, 0)}{1 + \sum_{k=1}^{\ell} \max(\tilde{x}_k(p) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0)}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

を与える。関数 $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_\ell(p))$ は S から S への連続関数である。ブラウワーの不動点定理によって、ある $p^* \in S$ が存在して、 $\phi(p^*) = p^*$ となる。

$p^* \in S$ であるから、 p^* に収束する価格列 $p^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ を $\text{int}S$ 内にとることができる。需要関数 $x(p)$ には $\text{int}S$ 内でワルラス法則が成立するから、各 ν に応じてある財 h が存在して、 $x_h(p^\nu) \leq \sum_{i=1}^m \omega_h^i$ である。このような h は列の番号 ν 毎に異なるが、財番号は有限である。したがって価格列の部分列を適切にとれば、ある特定の番号を繰り返すと考えることができる。それを h とする。すると、 $x_h(p^*) = \tilde{x}_h(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_h^i$ が成立する。いま、 $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k=1}^\ell \max(\tilde{x}_k(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0)$ とおけば、

$$\begin{aligned} \beta p_h^* &= p_h^* + \max\left(\tilde{x}_h(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_h^i, 0\right) \\ &= p_h^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

が成立する。二つのケース (i) $p_h^* = 0$ 、(ii) $p_h^* \neq 0$ がある。(i) が成立する場合には、境界条件によって、十分大きな ν について、 $x_h(p^\nu) \geq K$ である。よって、このとき、(5.6) の右辺は正である。したがって $p_h^* > 0$ となり、これは矛盾である。したがって、(ii) のケースだけを考察すれば良い。このとき、 $\beta = 1$ でなければならない。よって、あらゆる k に関して、

$$p_k^* = p_k^* + \max\left(\tilde{x}_k(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0\right)$$

となる。これは、境界条件よりすべての k について $p_k^* > 0$ であると共に、すべての k について

$$x_k(p^*) = \tilde{x}_k(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_k^i$$

を意味する。これと、ワルラス法則によって、

$$x_k(p^*) = \sum_{i=1}^m \omega_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, \ell$$

を意味する。これは競争均衡価格 p^* が存在することを示している。

5.4 均衡存在と不動点定理

競争均衡の存在がブラウワーの不動点定理によって導かれることが知られた。逆の論証「競争均衡の存在がブラウワーの不動点定理を意味するか」について考察する。いま、超過需要関数 $z: S \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ について、

(C') $z(p) = (z_1(p), \dots, z_\ell(p))$ は連続である。

(W') 任意の $p \in S$ について、 $pz(p) = 0$ である。

を課す。ここでは、前節までに考察されていた (B) を想定していない。前節の $(\tilde{x}_j(p) - \sum_{i=1}^n \omega_j^i)_{j=1}^\ell$ がここでの $z(p)$ に対応する。

前節では S^\square と S とを明瞭に区別して存在証明を与えた。これは需要が無限に発散する可能性を考慮に入れてのことである。不動点が境界に存在する可能性もあるので、これまでのゼロ価格では需要が無限に発散するという要求を、ここでは、外しているのである。ここでは、 S^\square と S とを区別せず存在証明を与える。これは、いわば、前節の簡易版であるが、論理構成の主要な内容が明らかになるという点で、有用である。

前節と同じ価格反応関数

$$\phi_j(p) = \frac{p_j + \max(z_j(p), 0)}{1 + \sum_{k=1}^n \max(z_k(p), 0)}, j = 1, 2, \dots, \ell$$

としてやれば、 $\phi: S \rightarrow S$ の連続関数になるからブラウワーの不動点定理によって、ある $p^* \in S$ が存在して、

$$\phi(p^*) = p^*$$

が成立する。 $p^*x(p^*) = 0$ であるから、ある財 j が存在して、 $p_j^* > 0$ かつ $x_j(p^*) \leq 0$ である。よって、

$$p_j^* \left(1 + \sum_{k=1}^n \max(z_k(p^*), 0) \right) = p_j^*$$

が成立するので, $\sum_{k=1}^n \max(z_k(p^*), 0) = 0$ したがって, $z_k(p^*) \leq 0, k = 1, 2, \dots, \ell$ である。もし, $p_k^* > 0$ であって $z_k(p^*) < 0$ となることがあれば, 他の財 h があって, $p_h^* z_h(p^*) > 0$ でなければならないので, このようなことは発生しない。これは二つの内容

$$p_j^* > 0 \Rightarrow z_j(p^*) = 0 \quad (5.7)$$

$$z_j(p^*) < 0 \Rightarrow p_j^* = 0 \quad (5.8)$$

を意味する。(5.8) は厳密な超過供給がある場合には, 価格はゼロであること, すなわち, 自由財であることを示している。(5.7) と (5.8) は需給均衡が成立することを示している。

以上のようにして, ワルラス的均衡存在定理が確立される。

定理 5.2 [Walras existence theorem] 超過需要関数 $z(\cdot)$ が (C') , (W') を満たせば, (5.7) と (5.8) を満たすワルラス均衡価格 p^* が存在する。

この節での目標は この逆 を示すことである。ワルラス的均衡存在定理が成立すると仮定すれば不動点定理が得られることを示そう。

Step 1 いま, f を $S = \{p \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \sum_{j=1}^\ell p_j = 1\}$ で定義され, 値を S 上にとる連続関数とする。ワルラス的均衡存在定理が成立するならば, 凸コンパクト集合 S 上で不動点定理が成立することをまず示しておこう。

連続関数 $f(p) = (f_1(p), \dots, f_\ell(p)) \in S$, for $p \in S$ が与えられたとき, (C') と (W') をみたとす超過需要関数を組み立て, それが不動点の存在を意味するように議論を構成することが目標である。

そこで, $p \in S$ に対して, 次のような写像を定義する。

$$z_j(p) = f_j(p) - p_j \mu(p), \quad j = 1, 2, \dots, \ell,$$

$$\mu(p) = \frac{\sum_{i=1}^\ell p_i f_i(p)}{\sum_{i=1}^\ell (p_i)^2}.$$

このような関数 $z_j(p), j = 1, 2, \dots, \ell$ について, (W') : $\sum_{j=1}^\ell p_j z_j(p) = 0$ や (C') : 連続関数性 は明らかである。ワルラス的均衡存在定理によって,

ある $p^* \in S$ が存在して,

$$\begin{aligned} z_j(p^*) &\leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \\ p_j^* > 0 &\Rightarrow z_j(p^*) = 0 \\ z_j(p^*) < 0 &\Rightarrow p_j^* = 0 \end{aligned}$$

が成立する。したがって,

$$0 \leq f_j(p^*) \leq p_j^* \mu(p^*), \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

である。さらに, $p_j^* > 0$ であれば, $f_j(p^*) = p_j^* \mu(p^*)$ であり, $p_j^* = 0$ のときには $0 = f_j(p^*) = p_j^* \mu(p^*)$ であるから, 結局,

$$f_j(p^*) = p_j^* \mu(p^*), \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

が得られる。 j について合算をすると,

$$1 = \sum_{j=1}^{\ell} f_j(p^*) = \mu(p^*) \sum_{j=1}^{\ell} p_j^* = \mu(p^*)$$

が得られる。よって,

$$f_j(p^*) = p_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

が得られる。これは p^* が f の不動点であることを示している。

Step 2 X を \mathbb{R}^s の非空凸コンパクト集合で, $\ell - 1$ 次元であるとする。ここで, \mathbb{R}^s の部分集合の「次元」とは, $\hat{x} \in X$ とするとき, $\hat{X} = \{y \in \mathbb{R}^s \mid \exists x \in X : y = x - \hat{x}\}$ の基底の数 (一次独立なベクトルの最大数) をいう。連続関数 f を X から X への連続関数とする。Step 1 で得られたことを利用して, f に不動点があることを証明する。

これまでの単体 S は $\ell - 1$ 次元である。二つの凸コンパクト集合 S と X の間には一対一で連続でその逆像も連続な上への写像 ψ が存在する。このような写像を位相同型 homeomorphism であるという。すなわち,

$$\psi : X \rightarrow S$$

$$\forall p \in S \exists x \in X \text{ such that } \psi(x) = p \quad : \text{ onto map}$$

$$\forall x, \forall x' \in X (\psi(x) = \psi(x') \Rightarrow x = x') : \text{ one to one map}$$

を満たす ψ が存在する⁷。ここでは X, S はそれぞれ有限次元のユークリッド空間 $\mathbb{R}^s, \mathbb{R}^\ell$ におけるコンパクト部分集合であるから、一対一で上への連続写像 ψ が存在すれば ψ^{-1} が連続であるのは明らかである。

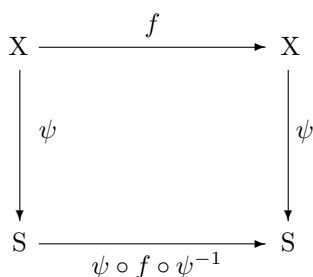


図 5.1: 不動点

この ψ を用いて定義される関数 $\psi^{-1} \circ f \circ \psi$ は S から S への連続関数となる⁸。Step 1 で示されたように、 $\psi^{-1} \circ f \circ \psi$ には不動点 $p^* \in S$ が存在する。すなわち、

$$(\psi^{-1} \circ f \circ \psi)(p^*) = p^*$$

である。これに、 ψ を左から作用させ、 $x^* = \psi^{-1}(p^*) \in X$ と定義すると、

$$\begin{aligned}
 f(x^*) &= f(\psi^{-1}(p^*)) \\
 &= (f \circ \psi^{-1})(p^*) \\
 &= (\psi^{-1} \circ \psi \circ f \circ \psi^{-1})(p^*) \\
 &= (\psi^{-1} \circ (\psi \circ f \circ \psi^{-1}))(p^*) = \psi^{-1}(p^*) = x^*
 \end{aligned}$$

となる。これは x^* が f の不動点であることを示している。

⁷この性質は、ミンコフスキー汎関数 Minkowski functional を用いて示すことができる。詳しくは本章の数学付録 5.7.1 を参照されたい。

⁸複数の連続関数の合成関数は連続であることに注意。

5.5 パレート効率性

財・サービスの組 $(x_j^i)_{i=1, j=1}^{n, \ell} \in \mathbb{R}_+^{n \times \ell}$ を配分 allocation と呼ぶ。配分には、次の複数の表現の仕方をする。すなわち、

$$x = (x^1, \dots, x^n) = (x_j^i)_{i=1, j=1}^{n, \ell} \in \mathbb{R}_+^{n \times \ell},$$

である。 x^i は第 i 消費者の消費ベクトルで、 $x^i = (x_1^i, \dots, x_\ell^i)$ である。配分の中で、特に、

$$\sum_{i=1}^n x_j^i \leq \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (5.9)$$

をみたく $(x_j^i)_{j=1, i=1}^{\ell, n}$ を実行可能 feasible な配分という。ここで、実行可能な配分の集まりを \mathfrak{F} と表す。実行可能な配分 $(x_j^i)_{j=1, i=1}^{\ell, n}$ がパレート効率的 Pareto efficient であるとは、任意の実行可能な配分 $(y_j^i)_{j=1, i=1}^{\ell, n} \in \mathfrak{F}$ に対して、

$$\forall i (u^i(y^i) > u^i(x^{i*}) \Rightarrow \exists j : u^j(x^{j*}) > u^j(y^j))$$

が成立することである。これは、

- (i) どのように他の実行可能な配分を選んでも ($y \in \mathfrak{F}$),
- (ii) 誰でも良いが第 i 消費者を配分 x^* におけるよりも、良くしようとすれば ($u^i(y^i) > u^i(x^{i*})$),
- (iii) それは、他の誰か j の犠牲のもとでなされている ($u^j(x^{j*}) > u^j(y^j)$)。

ということの意味している。

これをより明瞭にするために、実行可能な配分 x^* がパレート効率的でないとはどのようなことを考えてみよう。上での定義を否定すればよいのだから、ある実行可能な配分 $y \in \mathfrak{F}$ が存在して、

$$\exists i : u^i(y^i) > u^i(x^{i*}) \text{ かつ } \forall j : u^j(y^j) \geq u^j(x^{j*})$$

を満たす⁹。これは、誰も犠牲にせず i さんだけを良くできることを意味しており、これでは、 x^* を「良い」あるいは「効率的な」状態とは考えられないのである。

以上の準備のもとで、いわゆる「厚生経済学の第一基本定理」を示すことができる。

定理 5.3 (厚生経済学の基本定理) 各家計の効用関数が局所非飽和であれば、競争均衡 (x^*, p^*) で達成される配分 x^* はパレート効率的配分である¹⁰。

[証明] 結果を否定してみよう(背理法の仮定)。すなわち、ある配分 $y \in \mathfrak{F}$ が存在して、

$$\exists i: u^i(y^i) > u^i(x^{i*}) \text{ かつ } \forall j: u^j(y^j) \geq u^j(x^{j*})$$

が成立する。

まず、 (x^*, p^*) は競争均衡であるから、任意の k について、 x^{k*} は $\max u^k(x^k)$ subject to $p^* x^k \leq p^* \omega^k$ の解である。

$j \neq i$ について、 $p^* y^j < p^* \omega^j$ であったとする(背理法の仮定)。第 j 家計の選好は局所非飽和であるから、 y^j の十分近くに z^j があって、

$$u^j(z^j) > u^j(y^j) \text{ かつ } p^* z^j < p^* \omega^j$$

を満たすようにできる。これは x^{j*} が最大化の解であることに矛盾している。したがって、このようなことはない。つまり、

$$p^* y^j \geq p^* \omega^j \text{ for } j \neq i$$

である。さらに、 $u^i(y^i) > u^i(x^{i*})$ であるから、

$$p^* y^i > p^* \omega^i$$

⁹論理式 $A \Rightarrow B$ の否定が、 A かつ (not B) であることに注意せよ。

¹⁰明示はしていないが p^* が非負であることは前提である。

となる。

以上を総合して、 $y \in \mathfrak{F}$ より、

$$\sum_{k=1}^n p^* \omega^k \geq \sum_{k=1}^n p^* y^k > \sum_{k=1}^n p^* \omega^k$$

が得られる。これは矛盾である。したがって、 x^* はパレート効率的な資源配分である。■

5.6 粗代替経済

超過需要関数 excess demand function を $z(p) \stackrel{\text{def}}{=} x(p) - \sum_{i=1}^m \omega^i$ と定義する。正のあらゆる価格に関して、次の条件を満たす時すべての2財は強い意味で粗代替財であると言われる。つまり、任意の2財 i, j , ($i \neq j$) について

$z_i(p)$ は p_j に関して厳密な増加関数である

である¹¹。本節では、 z_i が他の財価格に対して厳密な増加関数である（粗代替経済）と想定する。

すべての2財が粗代替財になる交換経済の例は、すべての消費者が次のようなコブ・ダグラス型の効用関数を持つ場合である。すなわち、

$$u_h(z^h) = \prod (z_i^h + \omega_i^h)^{\alpha_i^h}, \alpha_i^h > 0, \text{ for all } i \text{ and } h,$$

ここで、 $z^h, \omega_i^h (> 0)$ はそれぞれ純需要 net demand と初期保有を表わしている。交換経済においては、純需要と超過需要は一致する。需要関数は

$$z_i + \omega_i^h = \frac{\alpha_i^h \sum_{j=1}^n p_j \omega_j^h}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^h}.$$

として得られ、この需要関数ではあらゆる2財が粗代替であることを示すのは易しい。

¹¹ここでは粗代替性を超過需要関数によって定義しているが、 $\sum_{i=1}^m \omega^i$ が一定値であるため、需要関数による定義と一致する。

5.6.1 均衡の一意性

粗代替経済で、競争均衡が一意であることを示しておこう¹²。超過需要関数が価格に関してゼロ次同次であるため、 p^* が均衡価格なら、任意の $\lambda > 0$ について λp^* も均衡価格である。ここでいう一意性は価格を単体 S に限った場合である。いま、 p^* を均衡価格であるとする。 q を p^* でない任意の他の価格とする。ただし、すべての $\mu > 0$ に対して、 $q \neq \mu p^*$ である。ここで、正の数 λ を

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \mu q \geq p^*\}.$$

を満たすものときめる。次の関係

$$\lambda = \max \left\{ \frac{p_1^*}{q_1}, \frac{p_2^*}{q_2}, \dots, \frac{p_n^*}{q_n} \right\}.$$

の成立を見るのは易しい。したがって、 $\lambda q \geq p^*$ and $\lambda q \neq p^*$ かつ、ある i について $\lambda q_i = p_i^*$ が成立する。よって、粗代替性によって

$$z_i(q) = z_i(\lambda q) > z_i(p^*) = 0$$

である。このようにして q は均衡価格でないことが示された。

5.6.2 安定性

粗代替経済における動学的安定性 dynamic stability について説明をする。動学的安定性は次の微分方程式で考察される。すなわち

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= z_j(p) \quad \text{when } p_j > 0 \\ &= 0 \quad \text{otherwise,} \end{aligned} \tag{5.10}$$

である。ここで、 $\dot{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} dp_j/dt$ であり、 $z_j(p)$ は第 j 財の超過需要関数である。この微分方程式は、需要が供給を超過すれば価格が上昇し、逆の場

¹²ここでの説明は Morishima, M. (1960) "On the Three Hicksian Laws of Comparative Statics," *Review of Economic Studies*, pp.195-201, に基づいている。

合には下落することを描いている。式 (5.10) が真の意味で動学的であるか、言い換えると、ここで書かれている t が 2003 年 7 月、2003 年 8 月といった暦上の時点を進んで行くか、には疑問はある。どの時点 t においても超過需要関数が同一である、という (5.10) の特徴は実際の時点が進んでいるわけではないことを意味している。したがって、この微分方程式は需給がバランスするまでセリが継続する競売買における「呼値の変動」を表現していると理解するのが適切であろう。

ここでは簡単化のために (5.10) を $\dot{p} = z(p)$ の形で考察する。均衡解は一意的に存在することはすでに知られている。ここで、財の量的な単位を変更して均衡価格 p^* において $p_i^* = 1$, for all $i = 1, \dots, n$ を満たすようにできる。微分方程式の解は $p(t)$ 集合 $\{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \|p\|^2 = n\}$ 内の部分集合である。実際、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|p\|^2 &= 2p\dot{p} \\ &= 2pz(p) = 0. \end{aligned}$$

であるからである。微分方程式 (5.10) の大域的安定性を示すには、適当なリアプーノフ関数 Lyapounov function を構築しなければならない¹³。

次の関数

$$\begin{aligned} V(t) &\stackrel{\text{def}}{=} p_j - p_k, \\ p_j &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} p_i, \\ p_k &\stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} p_i. \end{aligned}$$

を定義する。均衡解の一意的で用いた議論を利用すると、

$$0 = z_j(p^*) > z_j(p), \quad 0 = z_k(p^*) < z_k(p) \quad \text{if } p^* \neq p$$

である。よって、

$$\dot{p}_j < 0 \text{ and } \dot{p}_k > 0 \implies \dot{V} < 0$$

¹³ 数学付録 1 を参照せよ。

をえる。 V をリヤプーノフ関数と見れば、数学付録 1 の定理 4.3 (Lyapunov's Theorem) より安定性は成立する¹⁴。

5.7 数学付録

5.7.1 凸コンパクト集合間の位相同型写像

本章の 5.4 節において、利用した凸コンパクト集合間の位相同型写像について考察する。

1. X を \mathbb{R}^s の非空凸コンパクト集合とする。

2. $\hat{x} \in X$ を選んでおいて、 $\hat{X} = \{y \in \mathbb{R}^s \mid \exists x \in X : y = x - \hat{x}\}$ とする。 \hat{X} は X の要素 \hat{x} を原点に重なるようなるまで X を平行移動したものである。つまり、 $0 \in \hat{X}$ である。この写像を

$$\psi_0 : x \in X \mapsto x - \hat{x} \in \hat{X}$$

と定義する。これは one to one onto continuous である。 \hat{X} は非空凸コンパクトであることは明らかである。

3. \hat{X} に含まれる一次独立なベクトルを最も多くとって、それらを

$$a^1, a^2, \dots, a^{\ell-1} \in \hat{X}$$

とする¹⁵。 $\ell - 1 = 0$ の場合、つまり、 X と \hat{X} がゼロ次元の場合には、 X は一点集合である。このとき不動点の存在は明らかである。したがって、

¹⁴粗代替経済で、いま一つ有力な安定性を示す議論がある。この議論はいわゆる顕示選好の弱公準 weak axiom of the revealed preference を確立して、それを利用するものである。ここで、顕示選好の弱公準とは、すべての 2 財が粗代替財であるとき、

$$0 = p^* z(p^*) < p^* z(p) \text{ if } p \neq p^*.$$

が成立することである。Arrow, K.J., H.D.Block, and L.Hurwicz (1959) "On the competitive equilibrium II," *Econometrica*, Vol.27, 82-109. の Lemma 5 を参照せよ。

¹⁵ $a^1, a^2, \dots, a^{\ell-1}$ を \hat{X} から選んでおく必要は必ずしもない。例えば、

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \{\lambda x + \mu y \in \mathbb{R}^s \mid x, y \in \hat{X}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

を定義する。 L は \hat{X} を含む最小の線形空間である。 L の次元を $\ell - 1$ とし、その一次独立

$\ell - 1 \geq 1$ とすることに問題はない。 \hat{X} は $\ell - 1$ 次元の線形空間の中の部分集合となっている。

ここで、任意の $x \in \hat{X}$ に対して、

$$\psi_1 : x \in \hat{X} \mapsto (y_1, \dots, y_{\ell-1}) \in \mathbb{R}^{\ell-1}, \quad (5.11)$$

$$\text{where } x = y_1 a^1 + y_2 a^2 + \dots + y_{\ell-1} a^{\ell-1} \quad (5.12)$$

を定義する。以下で、この関数は 1 対 1 の写像であり (以下の 3.1. でそれを示す)、連続である (同、3.2.)、かつ、 $\psi_1(\hat{X})$ が凸であること (同、3.3.) を示そう。したがって、 $\psi(\hat{X})$ は凸コンパクト集合である¹⁶。

3.1. ψ_1 が 1 対 1 であることを示そう。

$$\begin{aligned} x &= y_1 a^1 + y_2 a^2 + \dots + y_{\ell-1} a^{\ell-1} \\ &= y'_1 a^1 + y'_2 a^2 + \dots + y'_{\ell-1} a^{\ell-1} \end{aligned}$$

とすれば、

$$0 = (y_1 - y'_1) a^1 + (y_2 - y'_2) a^2 + \dots + (y_{\ell-1} - y'_{\ell-1}) a^{\ell-1}$$

である。 $a^1, \dots, a^{\ell-1}$ が一次独立であるから、 $y_j = y'_j, j = 1, 2, \dots, \ell - 1$ である。これは 1 対 1 であることを示している。

3.2. ψ_1 が連続であることを示そう。 \hat{X} 内に点列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ をとり、 $\bar{x} \in \hat{X}$ に収束するとする。そこで、

$$\begin{aligned} x^\nu &= y_1^\nu a^1 + y_2^\nu a^2 + \dots + y_{\ell-1}^\nu a^{\ell-1}, \nu = 1, 2, \dots \\ \bar{x} &= \bar{y}_1 a^1 + \bar{y}_2 a^2 + \dots + \bar{y}_{\ell-1} a^{\ell-1} \end{aligned}$$

と定義する。したがって、

$$x^\nu - \bar{x} = (y_1^\nu - \bar{y}_1) a^1 + (y_2^\nu - \bar{y}_2) a^2 + \dots + (y_{\ell-1}^\nu - \bar{y}_{\ell-1}) a^{\ell-1}$$

なベクトルを

$$a^1, a^2, \dots, a^{\ell-1} \in L$$

と選んでも問題はないが、 \hat{X} から選んでおく和后々に便利である。

¹⁶ $\psi(\hat{X})$ がコンパクト集合であることは ψ_1 の連続性から導かれる。この議論はここでは省略する。

である。いま、仮にある j について、 $\nu \rightarrow \infty$ のとき $|y_j^\nu| \rightarrow \infty$ が発生したとすれば、 $z^\nu = \max(|y_1^\nu|, \dots, |y_{\ell-1}^\nu|)$ とすれば、

$$\frac{x^\nu - \bar{x}}{z^\nu} = \frac{y_1^\nu - \bar{y}_1}{z^\nu} a^1 + \frac{y_2^\nu - \bar{y}_2}{z^\nu} a^2 + \dots + \frac{y_{\ell-1}^\nu - \bar{y}_{\ell-1}}{z^\nu} a^{\ell-1}$$

となる。 $\nu \rightarrow \infty$ を図ると、左辺はゼロ（原点）に収束する一方で、右辺の少なくとも一つの係数はゼロでない実数値に収束する。これは $a^1, \dots, a^{\ell-1}$ が一次独立であることに反している。したがって、 $(y_1^\nu, \dots, y_{\ell-1}^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ は有界な列である。したがって、収束する部分列をとり、その収束先を $(\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_{\ell-1})$ とすれば、

$$0 = (\hat{y}_1 - \bar{y}_1)a^1 + (\hat{y}_2 - \bar{y}_2)a^2 + \dots + (\hat{y}_{\ell-1} - \bar{y}_{\ell-1})a^{\ell-1}$$

でなければならない。再び $a^1, \dots, a^{\ell-1}$ が一次独立であることから、

$$\hat{y}_j = \bar{y}_j, \quad j = 1, 2, \dots, \ell - 1$$

である。この議論は $(y_1^\nu, \dots, y_{\ell-1}^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ の任意の収束する部分列について成立するので、

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} x^\nu = \bar{x} \text{ であるとき } \lim_{\nu \rightarrow \infty} y_j^\nu = \hat{y}_j, \quad j = 1, 2, \dots, \ell - 1$$

が成立する。これは ψ_1 の連続性である。

3.3 . $\psi_1(\hat{X})$ が凸集合であることを示そう。 任意の $x \in \hat{X}$ と任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ を選んでおく。 $0 \in \hat{X}$ であるから、 $\lambda x = \lambda x + (1 - \lambda)0 \in \hat{X}$ である。

$\psi_1(x) = (y_1, \dots, y_{\ell-1})$ とすれば、

$$\begin{aligned} x &= y_1 a^1 + \dots + y_{\ell-1} a^{\ell-1} \\ \lambda x &= (\lambda y_1) a^1 + \dots + (\lambda y_{\ell-1}) a^{\ell-1} \end{aligned}$$

であるから、

$$\psi_1(\lambda x) = (\lambda y_1, \dots, \lambda y_{\ell-1}) = \lambda \psi_1(x)$$

である。また, $x, x' \in \hat{X}$ について, $x + x' \in \hat{X}$ とするとき,

$$\psi_1(x + x') = \psi_1(x) + \psi_1(x')$$

であることも同様にして示すことができる。

したがって, 任意の $y, y' \in \psi_1(\hat{X})$ と任意の $\lambda (0 \leq \lambda \leq 1)$ を選んでおく。 $x, x' \in \hat{X}$ が存在して, $y = \psi_1(x)$ かつ $y' = \psi_1(x')$ となる。上で確立したことから, $\lambda y = \psi_1(\lambda x)$, $(1 - \lambda)y' = \psi_1((1 - \lambda)x')$ である。よって, $\lambda y, (1 - \lambda)y' \in \psi_1(\hat{X})$ であり, 同時に,

$$\begin{aligned} \psi_1(\lambda x + (1 - \lambda)x') &= \lambda \psi_1(x) + (1 - \lambda)\psi_1(x') \\ &= \lambda y + (1 - \lambda)y' \in \psi_1(\hat{X}) \end{aligned}$$

となる。したがって, $\psi_1(\hat{X})$ は凸集合である。

4. 凸コンパクト集合 $\psi_1(\hat{X})$ と次のように定義される凸コンパクト集合 C :

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (p_1, \dots, p_{\ell-1}) \in \mathbb{R}_+^{\ell-1} \mid \sum_{j=1}^{\ell-1} p_j \leq 1 \right\}$$

を定義する。任意の $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_{\ell-1}) \in C$ にたいして, $(1 - \sum_{j=1}^{\ell-1} p_j)0 + p_1 a^1 + \dots + p_{\ell-1} a^{\ell-1} \in \hat{X}$ であるから¹⁷,

$$C \subset \psi_1(\hat{X})$$

である。いま, 定点 (C の重心):

$$p^0 = \left(\frac{1}{\ell}, \dots, \frac{1}{\ell} \right) \in C \subset \psi_1(\hat{X}) \subset \mathbb{R}^{\ell-1}$$

とを決めておく。関数 $\psi_2 : x \in \psi_1(\hat{X}) \mapsto x - p^0 \in \psi_1(\hat{X}) - \{p^0\}$ は1対

¹⁷ここで, 0 は \mathbb{R}^s のゼロベクトル (原点) である。

1, 連続, かつ上への関数であることは明らかである¹⁸。以下,

$$\psi_3 : \psi_1(\hat{X}) - \{p^0\} \rightarrow C - \{p^0\}$$

$$\psi_4 : (p_1, \dots, p_{\ell-1}) - p^0 \in C - \{p^0\} \rightarrow \left(p_1, \dots, p_{\ell-1}, 1 - \sum_{i=1}^{\ell-1} p_i \right) \in S$$

を定義し, 1対1, 連続, かつ上への関数であることを示していく。 ψ_4 がそうであるのは自明だから, 検討する対象は主に ψ_3 である。

4.1 . ここで, M を集合 $C - \{p^0\}$ あるいは $\psi_1(\hat{X}) - \{p^0\}$ であるとする。そこで, $p \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ にたいして,

$$\mu_M(p) = \inf\{\mu > 0 \mid p \in \mu M\}$$

を定義する。これはミンコフスキー汎関数 Minkowski functional と呼ばれるタイプの関数である¹⁹。 $p \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ に対して, ある $\lambda > 0$ が存在して, $\lambda p \in M$ は自明である。したがって, $\mu_M(p)$ は well defined である。

4.2 . $\mu_M(\cdot)$ の原点における連続性を示そう。すなわち, 点列 $p^\nu \in \mathbb{R}^{\ell-1}$, $\nu = 1, 2, \dots$ を $\nu \rightarrow \infty$ のとき, $p^\nu \rightarrow 0$ である任意のものとする。このとき, $\nu \rightarrow \infty$ のとき $\mu_M(p^\nu) \rightarrow 0$ となることを示せばよい。 $0 \in M$ であるから, ある正の数 δ が存在して,

$$B_\delta(0) = \{p \in \mathbb{R}^{\ell-1} \mid \|p\| \leq \delta\} \subset C - \{p^0\} \subset \psi_1(\hat{X}) - \{p^0\}$$

とすることができる。よって, 正の数 ε を任意に選んでおく。 $\delta\varepsilon > 0$ であるから, ある $\bar{\nu}$ が存在して, $\nu \geq \bar{\nu}$ であれば,

$$\|p^\nu\| < \delta\varepsilon \Rightarrow p^\nu \in \varepsilon B_\delta(0) \subset C - \{p^0\}$$

となる。よって, $\mu_M(p^\nu) < \varepsilon$ である。

¹⁸ \mathbb{R}^n の部分集合 A, B について, $A - B$ は $\{p \in A \mid \exists p' \in A, \exists p'' : p = p' - p''\}$ と定義される。

¹⁹ 位相ベクトル空間の本を参照せよ。例えば, Schaefer H.H (1970) *Topological Vector Spaces*, Springer を見よ。

4.3. $\mu_M(\cdot)$ の連続性を示そう。 $p, p' \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ にたいして, 正の数 λ, λ' を $\mu_M(p) < \lambda, \mu_M(p') < \lambda'$ を満たすものとする。これは, $p \in \lambda M$ かつ $p' \in \lambda' M$ である。よって,

$$p + p' \in (\lambda + \lambda')M$$

である。これは,

$$\mu_M(p + p') \leq \mu_M(p) + \mu_M(p')$$

である。この不等式は μ_M の劣加法性 subadditivity と呼ばれる。よって,

$$\begin{aligned} \mu_M(p) &= \mu_M(p' + (p - p')) \leq \mu_M(p') + \mu_M(p - p') \\ \mu_M(p') &= \mu_M(p + (p' - p)) \leq \mu_M(p) + \mu_M(p' - p) \end{aligned}$$

したがって,

$$|\mu_M(p) - \mu_M(p')| \leq \max(\mu_M(p' - p), \mu_M(p - p'))$$

である。さらに, p' が p に収束するならば, 4.1. より $\max(\mu_M(p' - p), \mu_M(p - p')) \rightarrow 0$ であるから, $\mu_M(p)$ は連続である。

4.4. $\psi_3 : \psi_1(\hat{X}) - \{p^0\} \rightarrow C - \{p^0\}$ の定義を与えよう。以下, 記号の煩雑性を回避するため,

$$M_1 = \psi_1(\hat{X}) - \{p^0\}, M_2 = C - \{p^0\}, \mu_1(\cdot) = \mu_{M_1}(\cdot), i = 1, 2$$

と書く。 M_1 のコンパクト性を考慮すれば, 任意の $p \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ に対して, $p \in \mu_1(p)M_1$ であるから, ある $\bar{p}_1 \in M_1$ に対して, $p = \mu_1(p)\bar{p}_1$ が成立する。同様に, その $p \in \mathbb{R}^{\ell-1}$ に対して, $p \in \mu_2(p)M_2$ より, ある $\bar{p}_2 \in M_2$ に対して, $p = \mu_2(p)\bar{p}_2$ が成立する。このようにして,

$$\psi_3 : p \in M_1 \mapsto \mu_1(p)\bar{p}_2 \in M_2$$

が得られる。これは, 今まで判明したことから, 一対一連続関数である。この逆関数 ψ_3^{-1} は,

$$\psi_3^{-1} : p \in M_2 \mapsto \mu_2(p)\bar{p}_1 \in M_1$$

である。

5. 以上の議論の流れをまとめると,

$$X \xrightarrow{\psi_0} \hat{X} \xrightarrow{\psi_1} \psi_1(\hat{X}) \xrightarrow{\psi_2} M_1 \xrightarrow{\psi_3} M_2 \xrightarrow{\psi_4} S$$

という一連の一对一連続で上への関数が得られる。

5.7.2 Lyapounov's Theorem

Let us consider a differential equation of the form:

$$\dot{x} = F(x), \quad (5.13)$$

where $F(\cdot)$ is an n -dimensional vector valued function which is continuous on $x \in \mathbb{R}^n$ and an initial value $x(0)$ is given. x^* is called an *equilibrium* if it satisfies $F(x^*) = 0$. We denote a solution to (5.13) with the initial value $y \in \mathbb{R}^n$ by $x(t, y), t \in [0, \infty)$.

定理 5.4 (Global Asymptotic Stability) *Let $F(x)$ of (5.13) be continuously differentiable on the whole \mathbb{R}^n space and let $V(\cdot)$ be continuously differentiable real-valued function on \mathbb{R}^n such that $V(x) \geq 0, \dot{V}(x) \leq 0$ for $x \in \mathbb{R}^n$ and $V(x) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$. Then all solutions of $\dot{x} = F(x)$ exist on $[0, \infty)$ and bounded, and if there exists a unique point x_0 such that $\dot{V}(x_0) = 0$, this x_0 is globally asymptotically stable.*[Brock and Malliaris(1989, Theorem 4.2, page 116)]

Note that

$$\dot{V}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} F_j(x).$$

We do not prove the above theorem.²⁰ We prove here more simple theorem. We assume that :

²⁰This theorem is taken from Brock and Malliaris *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, (1989, North-Holland, Amsterdam).

仮定 5.1 *The solution $x(t, x(0)), t \in [0, \infty)$ exists and is unique and continuous with respect to the choice of initial value $x(0)$ as well as t .*

定義 5.1 *A function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is called a **Lyapounov function** on C ($C \subset \mathbb{R}^n$) if*

- (a) *V is continuous in \mathbb{R}^n ,*
- (b) *$\forall x(0) \in C, V(x(t, x(0)))$ converges,*
- (c) *if $\{V(x(0))\} = \{V(x(t, x(0))) \mid t \in [0, \infty)\}$ then $x(0)$ is an equilibrium.*

Here we shall prove Lyapounov's Theorem which is stated as follows:

定理 5.5 (Lyapounov's Theorem) *Let x^* be an equilibrium of $F(x)$. Let $x(t, x(0))$ be a solution to (5.13). Suppose there exists a compact set C in \mathbb{R}^n such that*

- (i) *$\{x(t, x(0)) \mid t \in [0, \infty)\} \subset C$, for all $x(0) \in C$.*

Suppose that there exists a function $V(x)$ satisfying

- (ii) *$V(x) \geq 0$ for any $x \in C$ and $V(x) = 0$ iff $x = x^*$,*
- (iii) *$\dot{V}(x) < 0$ if $x \neq x^*$*

then the function V is a Lyapounov function on the compact set C and the solution to (5.13) is globally stable.²¹

Proof The conditions (a), (b) and (c) hold because of the continuity assumption, (ii) and (iii).

Let $x(0)$ be an any point in C . Then we see by (b):

$$\forall x(0) \in C \exists v^* \in \mathbb{R}_+ \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(0)) = v^*.$$

We can assume $v^* \in V(C)$ since $V(\cdot)$ is continuous. The path $x(t, x(0))$ lies in the compact set C . Then there exist a point x^0 in C and a subsequence satisfying

²¹Note that the condition (iii) implies that the point x^* is the unique equilibrium.

(#) $(x(t_\nu, x(0)))_{\nu \in \mathbb{N}}$ such that $x(t_\nu, x(0)) \rightarrow x^0$ and $t_\nu \rightarrow \infty$ as $\nu \rightarrow \infty$.

The relation:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t_\nu, x(0)) = x^0 &\implies \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t + t_\nu, x(0)) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t, x(t_\nu, x(0))) \\ &= x(t, \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t_\nu, x(0))) \\ &= x(t, x^0) \end{aligned}$$

leads us to:

$$\begin{aligned} v^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x(0))) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} V(x(t + t_\nu, x(0))) \\ &= V(\lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t + t_\nu, x(0))) \\ &= V(x(t, x^0)), \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.14)$$

This implies that x^0 is an equilibrium by (c). This together with the assumption (iii) and the relation (5.14), leads us to $v^* = 0$. And thus we obtain $x^0 = x^*$.

The above discussion can be applied to every converging subsequence of satisfying (#) in $x(t, x(0)), t \in [0, \infty)$. Then the path $x(t, x(0))$ converges to x^* . ■

5.7.3 ベルジュの最大値定理

ベルジュの最大値定理 Berge's Maximum Theorem を解説する²²。いくぶん難しいが、証明を見る機会が少ないと思われるので、のせておく。この数学付録では、ある程度の数学を前提としている。例えば、コンパクト集合の開被覆にかんする性質も解説しないまま用いる。これらは読者の preknowledge とする。この付録は、多少、初心者向けではない。

最初に、対応 correspondence における連続性概念を3種類導入する。

²²この定理は原著の英訳版 : Berge, C. (1963) *Topological Spaces*, Oliber & Boyd. に掲載されている。英訳本は現在、Dover Publishing Inc. から入手可能である。

定義 5.2 距離空間 X, Y が与えられているとする。 Y はコンパクトであるとする。 X から Y への対応 ϕ が上半連続 (upper semi-continuous, u.s.c.) であるとは,

- (i) 各 $x \in X$ に対して, $\phi(x)$ はコンパクト集合であり²³,
- (ii) X の任意の点 x にたいし, $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ を x に収束する列とする。このとき, $y^\nu \in \phi(x^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ として,

$$(\exists y \in Y : y^\nu \rightarrow y \text{ as } \nu \rightarrow \infty) \Rightarrow y \in \phi(x)$$

となることである。

同様に, X から Y への対応 ψ が下半連続 (lower semi-continuous, l.s.c.) であるとは, x を X の任意の点とし, $y \in \psi(x)$ とし, $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ を x に収束する列とする。このとき, Y 上に点列 $y^\nu \in \psi(x^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ が存在して,

$$y^\nu \rightarrow y \text{ as } \nu \rightarrow \infty$$

を満たすようにできる。

対応 $\Gamma : X \rightarrow Y$ が連続であるとは, Γ が上半連続であり, かつ, 下半連続であることである。

Maximum theorem. *If ϕ is a continuous numerical function in $X \times Y$ and Γ is a continuous mapping of X into Y such that, for each x , $\Gamma(x) \neq \emptyset$, then the numerical function M defined by $M(x) = \max\{\phi(x, y) \mid y \in \Gamma(x)\}$ is upper semi-continuous in X and the mapping Φ defined by $\Phi(x) = \{y \mid y \in \Gamma(x), \phi(x, y) = M(x)\}$ is a u.s.c. mapping in X into Y .*

ここで, Berge が “numerical function” と言っているのは『実数値関数』という意味であり, “mapping” とは『対応』のことである。

²³ 値域 Y はコンパクトであるので, 次の (ii) から $\phi(x)$ の閉集合性が得られる。したがって, (i) の要請は必ずしも必要ではないが, 注意の喚起のため明示している。

Theorem 2. *If ϕ is an upper semi-continuous numerical function in $X \times Y$ and Γ is a u.s.c. mapping of X into Y such that, for each x , $\Gamma(x) \neq \emptyset$, the numerical function M defined by*

$$M(x) = \max\{\phi(x, y) \mid y \in \Gamma(x)\}$$

is upper semi-continuous.

[証明]

I. ϕ, Γ が u.s.c. であることを利用して, $M(x)$ が実数値関数として上半連続であることを示す。

0 . 正の数 ε を任意に選ぶ。

1 . $x_0 \in X$ とする。各 $y \in \Gamma(x_0)$ にたいして近傍 $U_y(x_0), V(y)$ が存在して,

$$(x, z) \in U_y(x_0) \times V(y) \Rightarrow \phi(x, z) \leq \phi(x_0, y) + \varepsilon$$

である。このような $V(y), U_y(x_0)$ は各 $y \in \Gamma(x_0)$ についてとることができる。

2 . $\Gamma(x_0)$ はコンパクト集合 (u.s.c. mapping の定義より) であるから, 有限個の近傍 $V(y_1), \dots, V(y_n)$ が存在して $\Gamma(x_0)$ を覆うことができる。

3 . $U'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}(x_0)$ かつ $V(\Gamma(x_0)) = \bigcup_{i=1}^n V(y_i)$ とする。すると, $x \in U'(x_0), y \in V(\Gamma(x_0))$ であれば,

$$\phi(x, y) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \phi(x_0, y_i) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon$$

が成立する。

4 . さらに, 近傍 $U(x_0)$ が存在して,

$$x \in U(x_0) \Rightarrow \Gamma(x) \subset V(\Gamma(x_0))$$

となる (Berge では、これで u.s.c. の定義がなされている)。したがって、

$$x \in U(x_0) \cap U'(x_0) \Rightarrow M(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \phi(x, y) \leq M(x_0) + \varepsilon$$

となる。

II. ϕ, Γ が l.s.c. であることを利用して、 $M(x)$ が実数値関数として下半連続であることを示そう。

5. 正の数 ε を任意に選ぶ。

6. $x_0 \in X$ とする。 M の定義によって、ある $y_0 \in \Gamma(x_0)$ が存在して、

$$M(x_0) - \varepsilon < \phi(x_0, y_0)$$

である。

7. $\phi(\cdot)$ は l.s.c. であるから、 (x_0, y_0) のある近傍 $U(x_0) \times V(y_0)$ が存在して、

$$(x, y) \in U(x_0) \times V(y_0) \Rightarrow \phi(x, y) \geq \phi(x_0, y_0) - \varepsilon \geq M(x_0) - 2\varepsilon$$

である。

8. $y_0 \in V(y_0) \cap \Gamma(x_0)$ であるから、 $V(y_0) \cap \Gamma(x_0) \neq \emptyset$ である。 Γ の l.s.c. 性より、ある近傍 $U'(x_0)$ が存在して

$$x \in U'(x_0) \Rightarrow \Gamma(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$$

である (Berge では、これで l.s.c. の定義がなされている)。したがって、 $\tilde{y} \in \Gamma(x) \cap V(y_0)$ とすれば、 $x \in U(x_0) \cap U'(x_0)$ である時、

$$M(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \phi(x, y) \geq \phi(x, \tilde{y}) \geq M(x_0) - 2\varepsilon$$

となる。

III. 最終段階

9 . 関数 ϕ は $X \times Y$ の上で連続であるから M は連続な関数である。(上の Theorem 2 が lower semi continuous 版で成立する)

10 . さらに, 写像 Δ

$$\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid M(x) - \phi(x, y) \leq 0 \}$$

は閉である。よって, $\Phi = \Gamma \cap \Delta$ は u.s.c. である。■