

ミクロ経済学Ⅰ

Consumer Theory

2003 年 前期 火曜 4 限

神戸大学大学院・経済学研究科

Prepared by 入谷 純

はじめに

経済学の基本的な概念である需要と供給はミクロ経済学においてその基礎を与えられる。さらに、現代の経済学におけるミクロ経済学およびその方法の果たす役割は大きい。例えば、マクロ経済学においてさえ用いられるものは基本的にミクロ経済学の技術であることが多いのである。

「ミクロ経済学Ⅰ」は大学院のコア科目の一つである。この科目は最低限必要とされると同時に、その上に豊かな応用や深い理論探究へとつながるための基礎的な知識を提供することを目的とする。そのため、2003年度ミクロ経済学Ⅰの講義では消費者の理論を解説することを目標とした。まず第1章にて消費者の選択を最大化問題として表現する。第2章では、古典的なラグランジュ法によって、消費者選択問題の解とその必要条件と十分条件を考察する。ここでの主要な用具は微分法である。第3章ではスルツキー方程式を導出する。これは比較静学の標準的な手法である。ここで用いる用具は陰関数定理である。さらに、財の連関性への解説をする。第4章では凸解析によって需要関数の連続性の解説をし、さらに双対法によって支出関数の性質を考察する。ここでは、凸関数や凹関数に関する技術を用いる。最後の第5章では、交換の一般均衡を考察する。

経済学では数学的な表現を与えることが大変多い。ミクロ経済学では特に顕著である。そのため各章毎に数学付録をつけ、学生が自習するための助けとなるようにした。しかし、数学を解説することは本講義の目的ではないので、参加者各自がしっかりと数学的な基礎を学ぶことを期待する。しかしながら、半期週一コマの講義で計画している5章までのすべてを紹介できるかは甚だ心許ない。そのため、自習にも用いることのできるようにこの講義ノートを準備した。諸君の経済学研究に実りの多いことを祈る。

本講義ノートの全部あるいは一部の無断転用転載を禁止する。

2003年7月8日 入谷 純

目次

第 1 章	消費者の選択問題	1
1.1	最大化問題	1
1.2	余暇，労働そして貯蓄	2
1.3	解の存在	4
1.4	選好関係	5
1.5	数学付録	7
第 2 章	ラグランジュ法	9
2.1	限界効用均等則	9
2.2	必要条件	12
2.3	十分条件	17
2.4	数学付録	19
第 3 章	代替関係の優越性	23
3.1	微分可能な需要関数の存在	23
3.2	スルツキー方程式	25
3.3	連関性	31
3.4	数学付録	40
第 4 章	凸解析による接近	43
4.1	準凹性	43
4.2	準凹関数の必要条件と十分条件	47
4.3	支出関数	49

第 5 章	交換の一般均衡	55
5.1	準備	55
5.2	競争均衡	56
5.3	競争均衡の存在	58
5.4	粗代替経済	60
5.4.1	均衡の一意性	61
5.4.2	安定性	62
5.5	数学付録 1 : Lyapounov's Theorem	63
5.6	数学付録 2 : ベルジュの最大値定理	66

第1章 消費者の選択問題

1.1 最大化問題

一般に，消費者の問題は

$$\max_{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell} u(x_1, \dots, x_\ell) \text{ subject to } p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_\ell x_\ell \leq I \quad (1.1)$$

のように表現される。ここで， p_j は第 j 財の価格， x_j は第 j 財の消費量， I は消費者の所得， u は効用関数，である。この章では，価格は全て正 $p_j > 0$ ， $j = 1, 2, \dots, \ell$ と仮定する。この問題の解を x_j^* ， $j = 1, 2, \dots, \ell$ と書けば，解は価格と所得からなるパラメータ $(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ によって決定される。その意味で，

$$(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I) \mapsto x_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

のように対応を考えることができる。これは解 x_j^* が $(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ の関数として表現できるということに他ならない。その関数を

$$x_j(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I), \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (1.2)$$

と書く。このなかの1つの関数 $x_1(p_1, p_2, \dots, p_\ell, I)$ の中の p_2, \dots, p_n, I を一定とみなして， p_1 だけの関数と考えてそのグラフを書けば，通常の需要曲線が描けることになる。

経済学の基本的な用具である需要 demand は最大化問題によって基礎付けられているのである。古典派の初期には需要が予め与えられているとして，つまり需要関数を出発点として経済学が組み立てられていたという。それに対して，現代の経済学では，効用関数と予算から最大化問題を通じ

て需要を基礎付ける議論がなされる。需要自身が経済現象であるという認識からはそれを説明しようとするスタンスは自然であろう¹。

考察すべき問題

上で与えた消費者の最大化問題 (1.1) には、いくつかの解決すべき点が残されている。それらは、

- 必要条件 問題 (1.1) の解はどのような性質を有しているのか。
- 連続性 需要関数 $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I)$ は価格と所得について連続か。
- 一意性 問題 (1.1) の解は一意か。
- 解の存在 問題 (1.1) には解があるのか。

である。

1.2 余暇，労働そして貯蓄

上の説明は極めて単純化されていて、これによって豊かな経済現象が描けるのかに疑問をもつかもれない。上の問題 (1.1) は様々なものに適応可能であることを示しておこう。最初に、労働や余暇の選択を (1.1) にどのように表現されるかから始めよう。いま、余暇の初期保有 initial holding, initial endowment があって一定値 H であるとする。これは、1日 が 24 時間であるというような、物理的な制約であると考えればよい。すると、余暇 x_1 と労働 y_1 の間には、

$$\begin{array}{rcc} \text{余暇} & \text{労働} & \\ x_1 & + & y_1 = H \end{array}$$

¹近年, Sonnenshein (1972) "Market Demand Functions," *Econometrica*. から始まる市場需要関数を基礎付ける分野がある。それはワルラス法則, 連続性等の通常の性質を持つ関数があれば, それがどのようなものであっても, それを市場需要関数とするようなミクロの構造 (家計, 効用関数) が存在する (しかも多数) という議論である。大胆な解釈をするならば, むしろ経済を決定するもの (価格や配分を決めるもの) はミクロの構造ではなく, 市場需要関数であるということになる。そのような意味で古典派が需要関数から経済学を構築したという視点が現在にも活き々とした経済理解を提供しているのである。このような議論の概観を知りたい人は,

Shafer, W., and H. Sonnenshein (1982) "Market Demand and Excess Demand Functions," in *HandBook of Mathematical Economics*, Vol.2 (eds.: Arrow and Intriligator), chapter 14.

を参照されたい。

の関係がある。ここでは，余暇を第 1 財と考えている。この制約を (1.1) に取り込む必要がある。つまり，

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \cdots + p_\ell x_\ell \leq p_1H + \bar{I}$$

とすれば，余暇の選択が表現される。右辺の \bar{I} は労働所得以外の所得である。この表現では，まずすべての余暇 H を売って（右辺 p_1H ），その後買い戻す（左辺 p_1x_1 ）ように書かれている。労働は余暇 x_1 が決まれば， $H - x_1$ として決定されるということになる。

その他に，現実の雇用契約は x_1 を自由に選択できるように制度化されていないという点がある。このときは H を実際の雇用契約上の労働時間を差し引いた余暇の総量で， $H - x_1$ を残業のように選択できる労働時間と考えるとよい。

次に貯蓄を (1.1) でどのように捉えるかであるが，表現の単純化のために 1 時点の財の数が 1 種類であるように考える。貯蓄とは資産の増加分と定義されるが，将来に支出するために現在の消費を少なくして将来に備えるという目的がある。そのためには，1 時点だけではなく，複数の時点を含まねばならない。いま，2 期間の問題として簡単化してみる。つまり，

$$\text{第 1 期} \quad p_1x_1 + s = I^1$$

$$\text{第 2 期} \quad p_2x_2 = I^2 + (1+r)s$$

というような形となる。 I^1, I^2 はそれぞれ第 1 期，第 2 期の所得で， s は貯蓄， x_1, x_2 はそれぞれ第 1 期，第 2 期の消費である。さらに， p_1, p_2, r はそれぞれ第 1 期，第 2 期の消費財の価格，そして利子率である。これを書き直すと，

$$p_1x_1 + \frac{p_2}{1+r}x_2 = I^1 + \frac{I^2}{1+r}$$

とすることができる。これは問題 (1.1) の制約条件と同じ形をしている。従って，効用が第 1 期の消費と第 2 期の消費に依存すると想定すれば，貯蓄の選択も (1.1) の視野の中に入ってくる。

貯蓄を (1.1) で考察する時には、注意すべき点がある。それは、 p_2 と I^2 である。将来の価格や所得は貯蓄を選択する時点では知られていない可能性がある。将来財の市場（先物市場，future market）があつて価格が形成されているなら p_2 や I^2 を知ることができるかもしれない。現実には将来財の市場は限られていて、ほとんどの将来の消費財に関する市場は存在しない。その時には、 p_2 と I^2 は予想値である。消費者が1つの値だけを予想する場合には (1.1) によって貯蓄を考察できる。

しかし、将来の予想にはリスクの考慮を伴う。つまり、可能な価格の分布を予想するであろう。そのような場合、いろいろな可能性（リスク）がある時の効用関数をどのように考えるべきか、という基本的な問題に戻らなければならない。そのような不確実性下の経済理論も多くの分野がある²。

1.3 解の存在

最初に、「解の存在」問題から確かめていこう。必要条件、連続性そして、一意性は以下の2章以降で考察される。ここで、次の仮定をする。

仮定 1.1 効用関数 $u(x_1, \dots, x_\ell)$ は定義域を \mathbb{R}_+^n 、値域を \mathbb{R} とする連続関数である。

²事象は確率的に生起するが、その様々な事象を予期しながら個人は選択をするのが通常である。不確実性下の経済における議論は、基礎理論、一時的均衡、保険等広い分野にわたっている。不確実性下において、効用をどのように捉えるべきかは、期待効用理論 expected utility theory の中心的課題である。その基本的な文献は

Savage, L. (1954) *The Foundations of Statistics*, Wiley.

Herstein, I.N., and J., Milnor (1953) "An Axiomatic Approach to measurable Utility," *Econometrica*.

であるが、議論の概観を得るには

Fishburn, P.C. (1982) *The Foundation of Expected Utility*, Reidel.

MasColllell, A., M.D. Whinston, and J.R. Green (1995) *Microeconomic Theory*, Chapter 6, Oxford University Press.

がよい。さらに、一般均衡モデルの拡張として、

Radner, R. (1972) "Existence of Equilibrium of Plans, Prices, and Price Expectations in a Sequence of Markets," *Econometrica*.

を出発点とする非完備市場モデルがある。非完備市場モデルには

Magill, M. and M. Quinzii (1996) *Theory of Incomplete Markets*, Vol.1, the MIT Press.

という優れた教科書がある。

次の定理に着目する。

定理 1.1 (ワイヤーシトラウスの定理) $X \subset \mathbb{R}^n$ を非空なコンパクト集合, f を X 上で定義された実数値連続関数とする。このとき, f は X 内で最大値と最小値を持つ。

予算集合 budget set

$$\{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p_1 x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \leq I\}$$

は, $p_j > 0, j = 1, 2, \dots, \ell, I \geq 0$ であればコンパクト集合 compact set である[†]。したがって, 仮定 1.1 があれば, 消費者選択の問題 (1.1) には必ず解が存在する。

[†] コンパクト集合はこの章の数学付録で解説されている。また, ワイヤーシトラウスの定理も数学付録で証明のスケッチが与えられている。

問題 1.1 コンパクト集合の例を 3 つ挙げなさい。

ゼロ次同次性

以上のようにして価格と所得の各組 (p_1, \dots, p_ℓ, I) に対して (1.1) を通じて解 x_j^* が定義され, これによって需要関数 $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), j = 1, 2, \dots, \ell$ が得られる。このとき, 任意の価格と所得の組 (p_1, \dots, p_ℓ, I) , そして, 任意の $\lambda > 0$ に対して,

$$x_j(p_1, \dots, p_\ell, I) = x_j(\lambda p_1, \dots, \lambda p_\ell, \lambda I), j = 1, 2, \dots, \ell$$

が成立する。これは, (1.1) の制約が λ によって変化しないことから直ちに従う。これを需要の価格と所得に関するゼロ次同次性という。

1.4 選好関係

授業ではほとんど触れなかったが, 選好関係 preference relation について付言しておきたい。この分野はミクロ経済学あるいはその理論的な応用を目指す人には必須である³。しかし, 他の分野の研究者には必ずしも必須ではなく, 興味を持たない方は読みとばしても問題はない。

³ 準順序 quasi order, 半順序 partial order, 順序 order 等は単に効用の基礎論にのみ用いるものではない。K.J. アローや A. センらが築き上げた社会的選択論 social choice theory

消費者の選択の対象となる消費ベクトルは $X \subset \mathbb{R}^\ell$ に属するものとする。これまで $X = \mathbb{R}_+^\ell$ としてきたが、この節では必ずしもそうではない。 X は選好場 preference field と呼ばれる。 X について

閉集合性 X は \mathbb{R}^ℓ の閉集合である。

下への有界性 X は不等号 \leq に関して^か下界 lower bound を持つ[†]。

凸集合性 X は凸集合である[‡]。

を仮定する。

選好場の自身との積集合 $X \times X$ の部分集合 R を関係 relation と呼ぶ。

定義 1.1 次の五つの性質を満たす関係 $\preceq \subset X \times X$ を選好関係と言う。

反射性 任意の $x \in X$ について $(x, x) \in \preceq$

推移性 任意の $x, y, z \in X$ について $(x, y) \in \preceq$ かつ $(y, z) \in \preceq$ ならば、 $(x, z) \in \preceq$ である。

完備性 任意の $x, y \in X$ について $(x, y) \in \preceq$ または $(y, x) \in \preceq$ である。

連続性 任意の $x \in X$ について、二つの集合 $\{y \in X \mid (x, y) \in \preceq\}$ 、 $\{y \in X \mid (y, x) \in \preceq\}$ は閉集合である。

特に、反射性と推移性を満たす関係を準順序 preorder, quasiorder と呼ぶ。通常、準順序 \preceq が

反対称性 $(x, y) \in \preceq$ かつ $(y, x) \in \preceq$ ならば $x = y$ となる。

は個人の順序付けから社会的な順序付けを確立できるルールがあるかを議論する。また、所得分配の不平等をいかに測るかという議論も所得分配の集合にかんして、順序を入れる作業である。専門誌、例えば、*Econometrica*, *Social Choice and Welfare* 等を見れば判るように、この分野では今日ますます多くの論文が書かれている。順序に関する基礎的な議論を知るには「集合論」Set Theory を概観しておくことが、遠回りであっても結果的には有用であろう。特にツオルンの補題 Zorn's Lemma とその周辺を知っておく必要がある。集合論は数学基礎論に属するが、Halmos, P.R. (1970), *Naive Set Theory*, Springer, や Stoll, R.R. (1961), *Set Theory and Logic*, Dover 等の読みやすい教科書がある。特に前者は 100 ページ程度の本で極めて易しく書かれている。あるいは、細部に立ち入らないでツオルンの補題だけを知るために、Dugandji, J. (1966), *Topology*, Allyn and Bacon Inc. の第2章を読むこともすすめられる。

† 「 \leq に関して下界を持つ」とは「ある b が \mathbb{R}^ℓ の中に存在して任意の $x \in X$ に対して $b \leq x$ が成立すること」である。

‡ 「 X は凸集合である」とは「任意の実数 λ , ($0 \leq \lambda \leq 1$) と任意の2点 $x, y \in X$ について $\lambda x + (1 - \lambda)y \in X$ が成立すること」である。

を満たす時、半順序 partial order と呼ばれる。選好関係では反対称性が課されていないことに注意せよ。選好関係は、経済学で用いる無差別図表を表現するための道具である。その表現に合わせて、 $(x, y) \in \preceq$ を $x \preceq y$ と表現することが多い。選好関係と効用関数について次の定理が知られている。

定理 1.2 (表現定理) 選好関係は連続的な効用関数によって表現できる。すなわち、 X 上に連続関数 u が存在して、

$$x \preceq y \Leftrightarrow u(x) \leq u(y)$$

が成立する。

この定理は、いくぶん技術的に過ぎるので、ここでは証明しない。興味のある方は G., Debreu (1959), *Theory of Value*, Yale University Press の 56page (1) を参照するのがよい。

1.5 数学付録

集合 X から集合 Y への関数 function f とは、任意の $x \in X$ に対して Y のある 1 つの要素 $f(x) \in Y$ † を対応させるルールである。このとき、 X を定義域 domain、 Y を値域 range という。

† どの x についても $f(x)$ はただ一つでないといけない。

定義 1.2 \mathbb{R}^n の点列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ が $x \in \mathbb{R}^n$ に収束する (あるいは単に $x^\nu \rightarrow x$ as $\nu \rightarrow \infty$ と書く) とは、任意の正の数 ε に対して、ある番号 n_0 が存在して、 $n \geq n_0$ をみだすどのような番号 n についても、 $\|x_n - x\| < \varepsilon$ が成立することである。

定義 1.3 \mathbb{R}^n の部分集合 X が有界であるとは、ある正の数 K が存在して、どのような $x \in X$ に対しても $\|x\| \leq K$ が成立することである。

定義 1.4 \mathbb{R}^n の部分集合 X が閉集合であるとは、 X 内に列 $x^\nu \in X, \nu = 1, 2, \dots$, をとったとき、ある点 $x \in \mathbb{R}^n$ が存在して $x^\nu \rightarrow x$ as $\nu \rightarrow \infty$ が成立するならば、 $x \in X$ が成立する集合である。

定義 1.5 \mathbb{R}^n の部分集合 X がコンパクト集合であるとは、それが有界かつ閉集合となることである⁴。

定義 1.6 f を \mathbb{R}^n の部分集合 X 上で定義された関数とする。 f が連続であるとは、任意の $x \in X$ について、 x に収束する X の列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ をどのように選んでも、実数列 $f(x^\nu), \nu = 1, 2, \dots$ が $f(x)$ に収束することである。

ワイヤーシトラウスの定理：証明のスケッチ

集合 $Y \stackrel{\text{def}}{=} \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in X\}$ は実数の非空な部分集合である。 Y が上に有界[†]でないとする。任意の正の整数 ν について $f(x^\nu) \geq \nu$ となるような点 $x^\nu \in X$ が存在する。自然数 ν を動かしていくことによって、列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ が X の中にとれる。 x^ν は有界な集合 X の中に含まれるから、或る $x \in \mathbb{R}^l$ と $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ の部分列[‡] $x^{\nu_i}, i = 1, 2, \dots$ が存在して、 $x^{\nu_i} \rightarrow x$ as $i \rightarrow \infty$ である^{‡†}。 X は閉集合だから $x \in X$ であり、 f は連続だから、 $f(x^{\nu_i}) \rightarrow f(x)$ as $i \rightarrow \infty$ でなければならない。一方、 $f(x^{\nu_i}) \geq \nu_i$ であるから、 $f(x) = \infty$ ということになって、 f は $x \in X$ で定義されていない。これは矛盾である。よって、 Y は上に有界である。

Y の上界（任意の $y \in Y$ について $y \leq u$ となるような数 u を上界 upper bound という）の最小値を s とする^{‡‡}。任意の正の整数 ν にたいして、 $s - 1/\nu$ は Y の上界ではない。よって、ある x^ν が X の中に存在して、 $s \geq f(x^\nu) > s - 1/\nu$ である。このような点 x^ν が X の中に列を作るから、ある点 x に収束する部分列を取り出すことができる。このとき f の連続性を考慮すると、 $f(x) = s$ である。 s は Y の一つの上界だから $x \in X$ で f は最大値 s を達成する。

最小値に関しては、 $-f$ について上と同様の議論を繰り返せば良い。■

⁴有限時限のユークリッド空間を離れると、コンパクト集合の定義はこれとは異なるのが通常である。

† 「実数の集合 Y が上に有界である」 \Leftrightarrow 「ある数 u が存在して任意の $y \in Y$ について $y \leq u$ 」である。このような u を Y の上界という。

‡ 「 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ の部分列」とは、ある正の整数の無限個のならば $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_1 < \nu_2 < \dots$ をとってきたときにできる列 $x^{\nu_i}, i = 1, 2, \dots$ である。

‡† X がコンパクトであることの必要十分条件は X 内の任意の列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ に収束する部分列が存在することである。

‡‡ 非空で上に有界な実数の集合には上界（最小上界、supremum）が存在する。これは実数の基本的な性質である。

第2章 ラグランジュ法

多くの経済理論では，最大化の必要条件を導出しそれを解釈することによって，その問題の意味や経済的含意を引き出すことが多い。その標準的な方法がラグランジュ法である。ここでは，第1章の問題 (1.1) をラグランジュ法によって解説する。ここでは，効用関数は \mathbb{R}_+^ℓ で非減少，内部 \mathbb{R}_{++}^ℓ で連続微分可能であると仮定する。つまり，

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \geq 0, \quad \text{for all } i, \text{ for all } x \in \mathbb{R}_{++}^\ell$$

と仮定する。さらに， $I > 0$ と仮定する。

2.1 限界効用均等則

まず，第1章の問題 (1.1) の解 $x_1^*, x_2^*, \dots, x_\ell^*$ において， $x_1^* > 0, \dots, x_m^* > 0, x_{m+1}^* = 0, \dots, x_\ell^* = 0$ ，となつたとする。このとき，必要条件として

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x^*)/\partial x_1}{p_1} = \dots = \frac{\partial u(x^*)/\partial x_m}{p_m} \\ \geq \frac{\partial u(x^*)/\partial x_k}{p_k}, \quad k = m+1, \dots, \ell \end{aligned} \quad (2.1)$$

が成立することを示そう。ここで， $x^* \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^*, \dots, x_\ell^*)$ である。これは，いわゆる「限界効用均等則」である¹。

[Step 1] いま，第1章の問題 (1.1) の解 x^* では $x_1^* > 0, \dots, x_m^* > 0, x_{m+1}^* = 0, \dots, x_\ell^* = 0$ である。二つのインデックス i, j ， $1 \leq j \leq m$ [†] において，

¹ 関数の定義域の境界における微分については数学付録を参照せよ。

[†] インデックス i は $1 \leq i \leq \ell$ であることに注意。

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} > \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j}$$

が成立したとする。この時、 $\varepsilon > 0$ にたいして

$$h_i = \frac{p_j}{p_i} \varepsilon$$

$$h_j = -\varepsilon$$

$$h_k = 0 \quad \text{if } k \neq i, j$$

と $h = (h_1, \dots, h_\ell)$ を定義すれば、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} p_k(x_k^* + h_k) &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* + p_i h_i + p_j h_j \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* + p_i \frac{p_j}{p_i} \varepsilon + p_j (-\varepsilon) \\ &= \sum_{k=1}^{\ell} p_k x_k^* \leq I \end{aligned}$$

となる。しかも、 $x_j^* > 0$ であるから、 ε を十分小さくとれば、 $x_j^* + h_j = x_j^* - \varepsilon > 0$ である。よって、組 $x^* + h$ は予算制約を満たす。したがって、

$$\begin{aligned} u(x^* + h) - u(x^*) &= h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + h_j \frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*) + o(x^*, h) \\ &= p_j \varepsilon \left(\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} - \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j} + \frac{\sqrt{p_i^2 + p_j^2}}{p_i p_j} \frac{o(x^*, h)}{\|h\|} \right) \end{aligned}$$

である。 ε が十分小さければ、 $o(x^*, h)/\|h\|$ は十分小さな値であり、したがって、右辺の値は仮定により正值である。これは矛盾である。よって、

$$\frac{\partial u(x^*)/\partial x_i}{p_i} \leq \frac{\partial u(x^*)/\partial x_j}{p_j}$$

が成り立たねばならない。

[Step 2] インデックス i について $1 \leq i \leq m$ であるならば, Step 1 より逆方向きの不等式が成立するから,

$$\frac{\partial u / \partial x_i(x^*)}{p_i} = \frac{\partial u / \partial x_j(x^*)}{p_j}$$

が成立する。

[Step 3] 以上によって, 限界効用均等の法則が成立する。■

第 1 章の問題 (1.1) の解 x^* において, 予算が厳密な不等号:

$$p_1 x_1^* + \cdots + p_\ell x_\ell^* < I$$

が成立しているケースも考えられる。このような場合には, x^* は飽和 satiation しているという。このような事態は稀にしか起こらないので, 次のような局所非飽和 local non-satiation を仮定する。つまり,

局所非飽和 任意の $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ と任意の正の実数 ε について,
 $\|y - x\| < \varepsilon, y \in \mathbb{R}_+^\ell$ かつ $u(y) > u(x)$ を満たす y が存在する。

を仮定する。局所非飽和の仮定のもとでは, 予算制約は

$$p_1 x_1^* + \cdots + p_\ell x_\ell^* = I$$

となり, 等号で成立する。

問題 2.1 局所非飽和の仮定があれば, 予算制約は等号で成立することを示しなさい。

2.2 必要条件

局所非飽和が成立するものと仮定する。限界効用均等則を書き換えると、

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) - \lambda^* p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_j}(x^*) - \lambda^* p_j \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, \ell \quad (2.3)$$

$$I - (p_1 x_1^* + p_2 x_2^* + \dots + p_\ell x_\ell^*) = 0 \quad (2.4)$$

となるような λ^* が存在する。これより、次のラグランジュ関数 Lagrangean

$$L(x_1, \dots, x_\ell, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_1, \dots, x_\ell) + \lambda(I - p_1 x_1 - \dots - p_\ell x_\ell) \dagger$$

を定義してみる。変数 λ をラグランジュ乗数 Lagrange multiplier という。いま、 L が x^* において極大値を、 λ^* において極値を達成するとすると、

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^*, \lambda^*) \leq 0, \quad j = m + 1, \dots, \ell$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0,$$

が成立する。これはそれぞれ (2.2), (2.3), (2.4) に他ならない。あるいはこれを

$$x_i^* \frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0,$$

と書くこともできる。これらを一階の条件 first order condition, FOC と呼ぶ。最後の条件は次の章で再度議論される。

いま、効用関数に、 \mathbb{R}_{++}^ℓ における厳密な増加性、つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) > 0, \quad \text{for all } i, \text{ for all } x \in \mathbb{R}_{++}^\ell \quad (2.5)$$

† 記号 $\stackrel{\text{def}}{=}$ は左辺が右辺によって定義されていることを示す記号である。

を仮定する。この仮定があれば、局所非飽和性は成立することに注意せよ。さらに、 $I > 0$ と仮定する。本章においては以降、この二つを継続して仮定する。

問題 2.2 u が \mathbb{R}_{++}^ℓ において厳密に増加的であることは、(2.5) の必要条件であるが、十分条件でないことを確認しなさい。

すべての解が正値 $x_i^* > 0, i = 1, 2, \dots, \ell$ であれば（内点解であれば）、一階の条件は

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}(x^*, \lambda^*) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x^*, \lambda^*) = 0,$$

となる。本章では以下、

内点解の仮定：第 1 章の問題 (1.1) の解は内点解 $x_j^* > 0, j = 1, 2, \dots, \ell$ である

と仮定する。

一階の条件は微分がすべてゼロであるから、第 1 章の問題 (1.1) の解 x^* は $L(x, \lambda)$ が極値を持つ条件を満たすのである。

上の議論は一般的な最大化問題でも成立する。

定理 2.1 (ラグランジュの未定乗数法) $^2\theta, g$ を $X \subset \mathbb{R}^n$ 上の連続微分可能な実数値関数とする。このとき、

$$\max_{x \in X} \theta(x) \quad \text{subject to} \quad g(x) = 0$$

が x^* において最大値を持つとする。 x^* が定義域 X の内点であり、ある番号 i において、

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x^*) \neq 0$$

²解説や証明については、入谷・久我 (1999) 『数理経済学入門』有斐閣、第 8 章、定理 8.8, page 201 を参照せよ。

が満たされるとする。上の最大化問題において x^* で解を持つ必要条件是、

$$L(x, \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(x) + \lambda g(x)$$

が (x^*, λ^*) で極値を持つ必要条件と一致する。

問題 2.3 効用関数を $u(x_1, x_2) = (x_1)^\alpha (x_2)^\beta$, $\alpha > 0, \beta > 0$ とする, 予算制約を $p_1 x_1 + p_2 x_2 = I, x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$, とするとき, ラグランジュ法を用いて需要関数を求めなさい。ただし, $p_1 > 0, p_2 > 0, I > 0$ である。

二階の必要条件

いっそう精緻な必要条件を求めることが次の課題である。このサブセクションでは, 効用関数は二回連続微分可能であると仮定する[†]。さらに, 条件 (2.5) $\partial u(x^*)/\partial x_j > 0, j = 1, 2, \dots, \ell$ は, もちろん, 仮定されていることに注意しておく[‡]。

いま x を予算制約 $px = I$ を満たす任意の消費ベクトルとする。

$$u(x^*) \geq u(x)$$

でなければならない。さらに, $h \in \mathbb{R}^\ell$ を

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 + \dots + p_\ell h_\ell = 0$$

をみたす任意のベクトルとする。 x^* は内点解であるから, 十分小さな μ について $x^* + \mu h \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ かつ $p(x^* + \mu h) = I$ である^{‡‡}。消費ベクトル $x^* + \mu h$ は予算を満たすから, テーラーの定理を用いて³, ある実数 $\theta, (0 < \theta < 1)$ が存在して,

$$\begin{aligned} 0 &\geq u(x^* + \mu h) - u(x^*) \\ &= \mu \sum_{i=1}^{\ell} h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta \mu h) \end{aligned}$$

³ テーラーの定理については数学付録を参照せよ。

[†] 2次微分 $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ がすべて連続関数となるとき, u を二回連続微分可能と言う。

[‡] 一階の条件から $\lambda > 0$ となることに注意。

^{‡‡} $x^* + h$ が \mathbb{R}_{++}^n に含まれない可能性がある, つまり, u の定義域に $x^* + h$ が入らない可能性がある。それで, 十分小さな $\mu (> 0)$ を導入していることに注意。

一階の条件を考慮すると

$$\begin{aligned} &= \mu\lambda^* \sum_{i=1}^{\ell} h_i p_i + \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x^* + \theta \mu h) \\ &= \frac{\mu^2}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x^* + \theta \mu h) \end{aligned}$$

が成立する。つまり、この不等式は

$$ph = 0 \text{ であれば } \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x^* + \theta \mu h) \leq 0$$

を意味している。これは十分小さな任意の μ について成立する。よって μ をゼロに近付けると、効用関数は二回連続微分可能であるから、

$$ph = 0 \text{ であれば } \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} (x^*) \leq 0 \quad (2.6)$$

が成立する。これは解 x^* が満たす必要条件である。これを二階の条件という。

条件 (2.6) は $u(\cdot)$ の x^* における性質であるので、効用関数に予め要求しなければならないものである。条件 (2.6) がどのようなものであるかを調べてみよう。

説明の簡単化のために $\ell = 2$ とする。また、記号法を簡略化して、 $u_{ji} \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 u(x^*) / \partial x_i \partial x_j$ と表わす。(2.6) を再述すれば、

$$p_1 h_1 + p_2 h_2 = 0 \text{ となる任意の } h_1, h_2 \text{ について}$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i h_j u_{ij} \leq 0 \text{ が成立する}$$

ということである。 $h_2 = -h_1(p_1/p_2)$ より、任意の h_1 について

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 h_i h_j u_{ij} = (h_1)^2 \left(u_{11} - (u_{12} + u_{21}) \frac{p_1}{p_2} + u_{22} \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^2 \right) \leq 0$$

である。よって、

$$\begin{aligned} 0 &\geq u_{11} - (u_{12} + u_{21})\frac{p_1}{p_2} + u_{22}\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^2 \\ &= - \begin{vmatrix} 0 & p_1/p_2 & 1 \\ p_1/p_2 & u_{11} & u_{12} \\ 1 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} = -\frac{1}{(p_2)^2} \begin{vmatrix} 0 & p_1 & p_2 \\ p_1 & u_{11} & u_{12} \\ p_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \\ &= -\left(\frac{1}{p_2\lambda}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

でなければならない。

以上によって、 x^* において最大値を達成する必要条件は、

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 \\ u_1 & u_{11} & u_{12} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} \end{vmatrix} \geq 0 \quad (2.7)$$

と表現できる。この条件は (2.6) の必要条件であるが、こちらを二階の条件と呼ぶこともある。

二階の条件は財の数が2以上の場合も同様に述べることができる、ここでは結果だけを示しておく⁴。(2.6) の必要条件[†]は、

† 必ずしも十分条件ではない。

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_r & u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{vmatrix} \geq 0, \quad r = 2, 3, \dots, \ell \quad (2.8)$$

が成立することである。

⁴入谷・久我『数理経済学入門』page 196 系 8.3 参照。この本の 195-196 page にある定理 8.7 の $(-1)^r$ は $(-1)^{m+r}$ の誤り。

2.3 十分条件

次に, $x^* \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $px^* = I$ をみたす x^* において第 1 章の問題 (1.1) が極大値 local maximum となる十分条件を求めるのがこの節の目標である⁵。この節でも, 効用関数 u が 2 回連続微分可能性[†] であると仮定する。

[†] 二次導関数が連続であること。

定理 2.2 ある x^*, λ^* が存在して,

$$\sum_{i=1}^{\ell} p_i x_i^* = I, \quad \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) = \lambda^* p_i, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (2.9)$$

$$h = (h_1, \dots, h_\ell) \neq [0] \text{ かつ } ph = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j u_{ij}(x^*) < 0 \quad (2.10)$$

を満たし, かつ, u が局所非飽和であるならば, x^* は第 1 章の問題 (1.1) の極大解である。

[証明] u は局所非飽和であるから, 予算制約を満たす任意の消費ベクトル y に対して, 予算制約を等号で満たす x が存在して, $px = I$ かつ, $u(x) \geq u(y)$ を密用にできる。したがって, x^* が極大値をもたらすことを示すために, 予算制約を等号で満たすものだけと比較するだけで十分である。

いま, ε を正の定数として, 二つの集合 $C \stackrel{\text{def}}{=} \{ h \in \mathbb{R}^\ell \mid ph = 0, \|h\| = 1 \}$ と $U(x^*, \varepsilon) = \{ x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \|x - x^*\| < \varepsilon \}$ を定義する。 $(h_1, \dots, h_\ell, x_1, \dots, x_\ell) \in C \times U(x^*, \varepsilon)$ に対して定義される関数:

$$q(h, x) = \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j u_{ij}(x)$$

は, u が 2 回連続微分可能であるから, 連続である。次の主張が成立する。

主張: ある $\hat{\varepsilon} > 0$ が存在して, 任意の $(h, x) \in C \times U(x^*, \hat{\varepsilon})$ について, $q(h, x) < 0$ を成立させる。

⁵ 極大値の定義については数学付録を参照せよ。

上の主張を否定してみよう。つまり、どのような $\varepsilon > 0$ に対しても、主張が成立しなかったと仮定してみる（背理法の仮定）。任意の正の整数 ν に対して、ある $(h^\nu, x^\nu) \in C \times U(x^*, 1/\nu)$ が存在して、

$$q(h^\nu, x^\nu) \geq 0, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

である。列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ は x^* に収束する列である。さらに、 $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ はコンパクト集合 C 内の点列であるから、収束する部分列を取り出すことができる。一般性を失うことなく、 $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ 自身を収束する列とし、その収束先を h^* とする。 $q(h, x)$ の連続性より、 $q(h^*, x^*) \geq 0$ であり、 $\|h^*\| = 1$ であるから $h^* \neq [0]$ である。これは、(2.10) に矛盾する。したがって【主張】は成立する。

いま、 x を $px = I, \|x - x^*\| < \hat{\varepsilon}, x \neq x^*$ を満たす任意の消費ベクトルとする。ここで、 $h = x - x^*$ とすると、 $ph = 0$ であり、 $\|h\| \neq 0$ も明らかである[†]。そこで、テーラー展開を用いて、ある θ ($0 < \theta < 1$) が存在して、

$$\begin{aligned} u(x) - u(x^*) &= \sum_{i=1}^{\ell} h_i \frac{\partial u}{\partial x_i}(x^*) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} h_i h_j \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta h) \\ &= \|h\|^2 \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{\ell} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}(x^* + \theta h) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\|x^* + \theta h - x^*\| = \theta \|h\| = \theta \|x - x^*\| < \hat{\varepsilon}$ であることを考慮すると、上の式は負値である。よって、 $u(x^*) \geq u(x)$ である。

以上によって、 u は x^* において極大値を持つことが示された。■

(2.10) の必要十分条件は

$$(-1)^r \begin{vmatrix} 0 & u_1 & u_2 & \cdots & u_r \\ u_1 & u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1r} \\ u_2 & u_{21} & u_{22} & \cdots & u_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_r & u_{r1} & u_{r2} & \cdots & u_{rr} \end{vmatrix} > 0, \quad r = 2, 3, \dots, \ell \quad (2.11)$$

[†]ここでは、必ずしも $\|h\| = 1$ となっていないことに注意せよ。

が成立することである。[†]

様々な応用分野では、(2.11) が仮定されることが多い。これは、次のセクションでの議論における重要な仮定となる。

[†](2.8) は (2.7) の必要条件であるが、ここでは、必要十分条件になっていることに注意せよ。入谷・久我『数理経済学入門』page 210 参照。

2.4 数学付録

微分に関する付録

定義 2.1 実数値関数 $f(x_1, \dots, x_n)$ が点 $x = (x_1, \dots, x_n)$ において微分可能 (differentiable at x) であるとは、任意の $h = (h_1, \dots, h_n)$ に対して、ある定数 a_1, \dots, a_n と関数 $o(x, h)$ が存在して、

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n a_i h_i + o(x, h)$$

$$h \rightarrow 0 \text{ ならば } \frac{o(x, h)}{\|h\|} \rightarrow 0$$

が成立することである。

このとき、 a_j を微分係数あるいは f の x における微分という。ここで、上の第 2 式の $h \rightarrow 0$ とは “0 に収束する任意の点列 $h^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ ” を指すものである。したがって、第 2 式は

$$h^\nu \rightarrow 0 \text{ となる任意の点列 } h^\nu, \nu = 1, 2, \dots \text{ について,}$$

$$o(x, h^\nu) / \|h^\nu\| \rightarrow 0 \text{ が成立する}$$

という要請である⁶。

もし関数 f が定義域のあらゆる点で微分可能なら、単に微分可能 differentiable という。 f が微分可能なら、微分係数 a_j は x に依存する。つまり、 x が変われば微分係数は変化するから、 x の関数となる。これを

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$$

⁶もちろん言う迄もなく $\|h^\nu\| \neq 0, \forall \nu$ である。

と表わし、導関数と呼ぶ。あらゆる導関数が連続であれば、 f を連続微分可能 continuously differentiable という。導関数が微分可能であれば、二回微分可能 twice differentiable であるという。

微分の操作においては、 h の選択の任意性が重要である。たとえば、関数 f を \mathbb{R} から \mathbb{R} への関数として、

$$\begin{aligned} f(x) &= x & \text{if } x > 0 \\ &= -x & \text{if } x \leq 0 \end{aligned}$$

であるとする。 $h > 0$ ならば、

$$f(0+h) = f(0) + 1 \times h + 0$$

$h < 0$ ならば、

$$f(0+h) = f(0) - 1 \times h + 0$$

となつて、微係数が確定せず、微分可能ではない。

また、関数の定義域が限られている場合に微分をどう考えるかということもある。いま、定義域を X と書き、 $x \in X$ とする。 x が X の内点 interior point であれば、 h の任意性はさほど問題にならない。なぜなら、 $h^\nu \rightarrow 0$ であるから、 ν が十分大きければ $x + h^\nu \in X$ となるからである。一方、 x が X の境界点 boundary point であるならば、そのようなことは望めない。この時は、境界点 x に収束するような内点の列 $x^\nu \in X, \nu = 1, 2, \dots$ を考えて、その各々における微分 $\partial f(x^\nu)/\partial x_j$ の極限を考える。その極限がどの内点の列についても同一であれば、微分可能といい、その極限を x における微分という。

[注意] このような境界点での微分の定義は必ずしも一般的ではない。論文等で用いる時には「内点からの極限で境界点での微分を定義する」と明記すべきである。

極大値、近傍、内点、境界点

定義 2.2 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が点 x において増加的 increasing であるとは、任意の $x'(x' \geq x, x' \neq x)$ について $f(x') \geq f(x)$ が成立することである。

もし最後の不等号が厳密な不等号で成立すれば x において厳密に増加の strictly increasing であるという。定義域のどの点においても (厳密に) 増加であるなら, f は (resp. 厳密に) 増加的であるという。

定義 2.3 関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ において, $f(x^*)$ が極大値 local maximum であるとは, x^* のある近傍 U が存在して, 任意の $x \in U$ について $f(x^*) \geq f(x)$ が成立することである。

定義 2.4 $U \subset \mathbb{R}^n$ が x^* の近傍 neighborhood であるとは, ある正の数 ε が存在して, $\{y \in \mathbb{R}^n \mid \|y - x^*\| < \varepsilon\} \subset U$ となることである。

定義 2.5 $x^* \in \mathbb{R}_+^\ell$ が第 1 章の問題 (1.1) の制約付きの極大値であるとは, x^* のある近傍 U が存在して, 任意の $x \in U \cap \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid px \leq I\}$ について $u(x^*) \geq u(x)$ が成立することである。

定義 2.6 x が集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の内点 interior point であるとは, x のある近傍 U が存在して, $U \subset X$ が成立することである。 b が集合 X の境界点 boundary point であるとは, b の任意の近傍 V について $X \cap V \neq \emptyset$ かつ $(\mathbb{R}^n \setminus X) \cap V \neq \emptyset$ となることである[†]。

[†] 集合 $\mathbb{R}^n \setminus X$ は $\{x \in \mathbb{R}^n \mid x \notin X\}$ のことと約束される

ヤングの定理

関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ が二回微分可能ならば,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, \text{ for any } i, j$$

が成立する。

合成関数の微分

$n+1$ 個の関数 $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $g^j: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ を微分可能とする。ここで,

$$h(x_1, \dots, x_k) \stackrel{\text{def}}{=} f(g^1(x_1, \dots, x_k), \dots, g^n(x_1, \dots, x_k))$$

入谷・久我『数理経済学入門』165page 定理 7.2 参照。

入谷・久我『数理経済学入門』page 166 参照。

によって定義される関数 h を合成関数 composite function という。いま,
 $y_i = g^i(x_1, \dots, x_k), i = 1, 2, \dots, n$ と書くと,

$$\frac{\partial h}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial y_i}(y_1, \dots, y_n) \times \frac{\partial g^i}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_k), j = 1, 2, \dots, k$$

が成立する。

テーラーの定理

f を定義域が \mathbb{R}^n 値域を \mathbb{R} とする二回微分可能な関数とする。任意の
 $x, h \in \mathbb{R}^n$ に対して, ある θ ($0 < \theta < 1$) が存在して,

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x+\theta h)$$

が成立する⁷。

極大値の必要条件

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を二回微分可能とする。 f が $x = x^*$ で最大値を持つ必要
 条件は (i) $df(x^*)/dx = 0$, (ii) $d^2f(x^*)/dx^2 \leq 0$ が成立することである。

極大値の十分条件

関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を二回連続微分可能とする。 f が $x = x^*$ で最大値を持
 つ十分条件は (i) $df(x^*)/dx = 0$, (ii) $d^2f(x^*)/dx^2 < 0$ が成立すること
 である。

上述の二つの定理はテーラーの定理を用いれば容易に証明できる(各自試
 みよ)。

⁷入谷・久我『数理経済学入門』page 170 参照。

第3章 代替関係の優越性

この章では u は 2 回連続微分可能，かつ，第 1 章の問題 (1.1) の解 x^* では $x_i^* > 0, i = 1, 2, \dots, \ell$ が成立すると想定する。さらに，

正則条件：十分条件 (2.11) が x^* において成立する

を仮定する。2 回連続微分可能性より (2.11) は x^* の近傍 N で成立する。

3.1 微分可能な需要関数の存在

まず前節で学んだラグランジュの一階の条件によって， $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ において，

$$\begin{aligned} -p_1 x_1 - \dots - p_\ell x_\ell + I &= 0 \\ -\lambda p_i + u_i(x) &= 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

が成立する。言い換えると， $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ は連立方程式の解である。左辺のヤコビ行列式をつくり， $(x, \lambda) = (x^*, \lambda^*)$ において評価すると

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \dots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \dots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \dots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{\lambda^*}\right)^2 \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_\ell \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & u_{\ell 1} & \dots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} \quad (3.1)$$

となる。この式の両辺にあるのは行列式であるが，この行列式にあるような要素の配置を持つ行列を（右辺でも左辺でも）縁つきヘッセ行列 bordered Hesse matrix という¹。以下で，左辺の行列の行列式を Δ ，右辺の第 2

¹二次導関数からなる行列は単に，ヘッセ行列 Hesse matrix と呼ばれる。

項の行列の行列式を D と表記して用いる。正則条件が仮定されているから、左辺はゼロではない。よって、陰関数定理が適用できる[†]。つまり、 (p_1, \dots, p_ℓ, I) の近傍 U と U から (x^*, λ^*) の近傍 W への連続微分可能な $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), \lambda(p_1, \dots, p_\ell, I)$ が存在して[‡]

$$-p_1 x_1(p_1, \dots, p_\ell, I) - \dots - p_\ell x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I) + I = 0 \quad (3.2)$$

$$-\lambda(p_1, \dots, p_\ell, I) p_i + u_i(x(p_1, \dots, p_\ell, I)) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell \quad (3.3)$$

が任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について成立する。必要なら U をさらに制約することによって、任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について、

$$(x_1(p_1, \dots, p_\ell, I), \dots, x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I)) \in N$$

とすることができる。この事実と (3.2), (3.3) が成立すること、さらに、正則条件が成立することをみると、前節で得られた十分条件が満たされている。任意の $(p_1, \dots, p_\ell, I) \in U$ について、

$$x_j(p_1, \dots, p_\ell, I), \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad \text{は第1章の問題 (1.1) の解である} \quad (3.4)$$

が成立する。これは、近傍 U 上で微分可能な需要関数が存在していることに他ならない。

ラグランジュ乗数とルワの恒等式

需要関数とともに得られたラグランジュ乗数 $\lambda(p_1, \dots, p_\ell, I)$ の意味を探ってみよう。いま合成関数によって

$$v(p_1, \dots, p_\ell, I) \stackrel{\text{def}}{=} u(x_1(p_1, \dots, p_\ell, I), \dots, x_\ell(p_1, \dots, p_\ell, I))$$

を定義する。これは間接効用関数 indirect utility function と呼ばれる。合成関数の微分を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial I} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} \\ &= \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} + \dots + \lambda p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial I} \end{aligned}$$

[†] 陰関数定理はこの章の数学付録の最後に紹介されている。

[‡] 価格と所得 (p_1, \dots, p_ℓ, I) はこれまで、最大化問題の際のある一定値に固定されて来た。以降しばしば近傍 U の任意の要素についても同じ記号を用いる。関数としての表現であるので、混乱は避けられよう。

(3.2) を I で微分したものを考慮して,

$$\frac{\partial v}{\partial I} = \lambda \quad (3.5)$$

が得られる。つまり, $\lambda^* = u_i(x^*)/p_i$ は「所得が限界的に増加したときに、どの率で効用が増えるか」という所得の限界効用を意味している。

次に、間接効用と価格の関係について考察しよう。全く同様に、

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial p_j} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_j} \\ &= \lambda p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_j} + \cdots + \lambda p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_j} \\ &= -\lambda x_j \end{aligned} \quad (3.6)$$

が得られる。これはルワの恒等式 Roy's identity と呼ばれる²。

3.2 スルツキー方程式

さて、次に、価格が変化した時に需要がどのように変化するかを考察しよう。(3.2), (3.3) を p_i で微分してみよう。すると,

$$\begin{aligned} -p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i} - \cdots - (x_i + p_i \frac{\partial x_i}{\partial p_i}) - \cdots - p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\ -p_1 \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{11} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{1\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ -\lambda - p_i \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{i1} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{i\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ -p_\ell \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + u_{\ell 1} \frac{\partial x_1}{\partial p_i} + \cdots + u_{\ell \ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i} &= 0 \end{aligned}$$

²本によってはロイの恒等式とも呼ばれる。「ルワ」はフランス語の読みに従ったものである。

となる。行列の形式に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \dots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \dots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \dots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \dots & u_{\ell\ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\lambda/\partial p_i \\ \partial x_1/\partial p_i \\ \vdots \\ \partial x_i/\partial p_i \\ \vdots \\ \partial x_\ell/\partial p_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

となる。いま、この式の左辺第一項の行列の行列式を Δ と書く。クラメールの公式 Cramer's rule によって³、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} &= \frac{1}{\Delta} \times \begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \dots & \overbrace{x_i}^j & \dots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \dots & 0 & \dots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \dots & \lambda & \dots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \dots & 0 & \dots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} \\ &= x_i \frac{\Delta_j}{\Delta} + \lambda \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} \end{aligned}$$

となる。 Δ_j, Δ_{ij} はそれぞれ、行列式 Δ の $-p_j, u_{ij}$ に関する余因子 cofactor である。関係 (3.1) を見て、行列式 D を用いて書き換えると、

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} = -\lambda x_i \frac{D_j}{D} + \lambda \frac{D_{ij}}{D} \quad (3.8)$$

となる。ヤングの定理によって、 $u_{ij} = u_{ji}$ であるから⁴、 Δ, D は対称な行列式である。したがって、 Δ に $-p_j$ の入っている位置や D に u_j が入っ

³入谷・久我『数理経済学入門』82 page 参照。

⁴前章への数学付録参照。

ている箇所が二ヶ所あるが、その余因子を区別する必要がない。さらに、 $\Delta_{ij} = \Delta_{ji}$ も明らかである。

所得の増加による効果

次に、所得が変化した時に需要がどのように変化するかを考察しよう。(3.2), (3.3) を I で微分してみよう。すると、

$$\begin{aligned} -p_1 \frac{\partial x_1}{\partial I} - \cdots - p_i \frac{\partial x_i}{\partial I} - \cdots - p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= -1 \\ -p_1 \frac{\partial \lambda}{\partial I} + u_{11} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \cdots + u_{1\ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= 0 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\ -p_\ell \frac{\partial \lambda}{\partial I} + u_{\ell 1} \frac{\partial x_1}{\partial I} + \cdots + u_{\ell \ell} \frac{\partial x_\ell}{\partial I} &= 0 \end{aligned}$$

となる。行列の形式に書き直すと、

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \lambda / \partial I \\ \partial x_1 / \partial I \\ \vdots \\ \partial x_\ell / \partial I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よってクラメールの公式 Cramer's rule によって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j}{\partial I} &= \frac{1}{\Delta} \times \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & 0 & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & 0 & \cdots & u_{\ell \ell} \end{vmatrix}}^j \\ &= -\frac{\Delta_j}{\Delta} = \lambda \frac{D_j}{D} \end{aligned} \tag{3.9}$$

となる。 Δ_j, D_j は従来 of 記号である。

代替効果

相対価格の変化がもたらす効果を純粹に取り出すという目的で考案されたものである。つまり、価格変化は二つの経路をとって需要に効果をもたらすと考えられる。一つは、純粹の相対価格の変化の効果であり、いま一つは価格変化に伴う実質所得の変化がもたらす効果である。最初のを代替効果 substitution effect, 第2のものを所得効果 income effect と呼ぶ。代替効果は標準的には次のような手続きで考察される。つまり、価格が変化したとき、効用水準が一定に保持されるように所得が補償されるとすると、需要がどのように変化するかというものである。「効用水準が一定に保持されるように所得が補償される」という手続きを付け加えることによって「価格変化のもたらす実質所得の変化」を抜き去ろうというのである。

では、所得の補償をどのように表現すれば良いのであろうか。いま間接効用関数を用いて、 $v(p_1, \dots, p_\ell, I)$ の値を \bar{u} とする。ここで、 \tilde{I} に関する方程式

$$v(p_1, \dots, p_\ell, \tilde{I}) = \bar{u}$$

は $\tilde{I} = I$ で解を持つ。さらに、(3.5) によって、

$$\frac{\partial v}{\partial I}(p_1, \dots, p_\ell, I) = \lambda \neq 0$$

である。この二つの事実から陰関数定理を適用することができて、補償所得 compensated income は局所的に微分可能な関数 $\tilde{I}(\tilde{p}_1, \dots, \tilde{p}_\ell)$ によって表現できる。もちろん $\tilde{I}(p_1, \dots, p_\ell) = I$ である。そこで、 $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ とすれば、

$$v(p_1, \dots, p_\ell, \tilde{I}(p)) = \bar{u}$$

が成立するから、第 i 財価格が変動する時、

$$\frac{\partial v}{\partial p_i} + \frac{\partial v}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} = 0$$

この式を見る時は、左辺第一項は $v(p, \tilde{I}(p))$ の最初の p のなかにある p_i による微分であることに注意せよ。

よって, (3.5), (3.6) を用いて,

$$\frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} = -\frac{\partial v / \partial p_i}{\partial v / \partial \tilde{I}} = -\frac{-\lambda x_i}{\lambda} = x_i \quad (3.10)$$

となる。

ここで合成関数 $x_j(p, \tilde{I}(p))$ の中の補償所得関数 $\tilde{I}(p)$ は \bar{u} をもパラメータとして有している。それを明示して, $x_j(p, \tilde{I}(p, \bar{u}))$ と書く。これが補償需要関数 compensated demand function, あるいはヒックスの需要関数 Hicksian demand function である。 p が何度も出現する煩雑さを解消して単に $x_j(p, \bar{u})$ と書かれることもある。第 i 財価格の変化による第 j 財の代替効果 S_{ji} は, 所得の補償を伴った需要の変化であるから,

$$\begin{aligned} S_{ji} &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{I}} \frac{\partial \tilde{I}}{\partial p_i} \\ &= \frac{\partial x_j}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{I}}, \quad i, j = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

である。ラグランジュ乗数も $\lambda(p, \tilde{I}(p, \bar{u}))$ と合成関数として表現できる。同様にして,

$$\Lambda_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \lambda}{\partial p_i} + x_i \frac{\partial \lambda}{\partial \tilde{I}}$$

とする。

さて, 価格の関数としての補償所得 $\tilde{I}(p, \bar{u})$ を需要関数等に代入すると, 一階の条件は

$$\begin{aligned} -p_1 x_1(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) - \dots - p_\ell x_\ell(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) + \tilde{I}(p, \bar{u}) &= 0, \\ -\lambda(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) p_j + u_j \left(x_1(p, \tilde{I}(p, \bar{u})), \dots, x_\ell(p, \tilde{I}(p, \bar{u})) \right) &= 0, j = 1, 2, \dots, \ell \end{aligned}$$

となる。ここで, p_i の変動のおよぼす効果を考察するために, p_i によって

微分すると,

$$\begin{aligned}
 -p_1 S_{1i} - \cdots - (p_i S_{ii} + x_i) - \cdots - p_\ell S_{\ell i} + \frac{\partial \bar{I}}{\partial p_i} &= 0 \\
 -p_1 \Lambda_i + u_{11} S_{1i} + \cdots + u_{1\ell} S_{\ell i} &= 0 \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -p_i \Lambda_i + u_{i1} S_{1i} + \cdots + u_{i\ell} S_{\ell i} &= \lambda \\
 \cdots \quad \cdots \quad \cdots & \\
 -p_\ell \Lambda_i + u_{\ell 1} S_{1i} + \cdots + u_{\ell \ell} S_{\ell i} &= 0
 \end{aligned}$$

となる。(3.10) を考慮して, 行列の形式に書き直すと,

$$\begin{pmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \cdots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & u_{\ell \ell} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_i \\ S_{1i} \\ \vdots \\ S_{ii} \\ \vdots \\ S_{\ell i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。よってクラメールの公式 Cramer's rule によって,

$$\begin{aligned}
 S_{ji} &= \frac{1}{\Delta} \times \overbrace{\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & \cdots & 0 & \cdots & -p_\ell \\ -p_1 & u_{11} & \cdots & 0 & \cdots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_i & u_{i1} & \cdots & \lambda & \cdots & u_{i\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ -p_\ell & u_{\ell 1} & \cdots & 0 & \cdots & u_{\ell \ell} \end{vmatrix}}^j \\
 &= \frac{\Delta_{ij}}{\Delta} = \lambda \frac{D_{ij}}{D}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

となる。 Δ_{ij} , D_{ij} は従来の記号である。

所得効果と代替効果への分解

以上の準備によって, (3.8) は

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_j}{\partial p_i} &= -\lambda x_i \frac{D_j}{D} + \lambda \frac{D_{ij}}{D} \\ &= -x_i \frac{\partial x_j}{\partial I} + S_{ji} \\ &= \text{所得項} + \text{代替項}\end{aligned}\tag{3.12}$$

と分解できる。これをスルツキー方程式 Slutsky equation と呼ぶ。

3.3 連関性

財相互間の「つながり」を表現することを考えてみよう。これらは経済学の諸分野で利用される基礎的な概念である。それらは財の連関性 relatedness とよばれる。財の連関性とは、財と財がお互に競争的である（例えば、コーヒーと紅茶）、または、補い合うような関係にある（例えば、紅茶と砂糖）、といった財相互間の関係を総称するものである。財相互間の連関性は需要関数と密接につながっているであろうから、需要関数によって表現できるはずである。これに付け加えて、その財自身が持っている品質の違い（例えば、上級品とか下級品）も需要関数と関係しているはずである。これらも需要関数で表現できるだろう。

連関性の定義

直感的に理解できるような、コーヒーと紅茶のような競争的な関係にある財を代替財 substitutes とよぶ。

定義 3.1 (粗代替 gross substitute) 財 j が財 i の粗代替財であるとは、 p_i の上昇（下落）が財 j の需要の増加（resp. 減少）をもたらすことである。

る。正確には，

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \geq 0, \text{ (resp. } S_{ji} \geq 0)$$

のとき，財 j は財 i の粗代替財 (resp. 代替財) である。

また，紅茶と砂糖のように補い合う関係を2財を，補完財 complements とよぶ。

定義 3.2 (粗補完 gross complement) 財 j が財 i の粗補完財であるとは p_i の上昇 (下落) が財 j の需要の減少 (resp. 増加) をもたらすことである。正確には，

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_i} \leq 0 \text{ (resp. } S_{ji} \leq 0)$$

のとき，財 j は財 i の粗補完財 (resp. 補完財) である。

上の2つの定義において“粗”という接頭辞がついているのは所得項が入っていることを意味しており，この接頭辞がないのは，所得項が抜き去られて代替項だけに注目しているということである。このように財の連関性を定義すると， ℓ 種類の財があるから， ${}_{\ell}C_2 = \ell(\ell - 1)/2$ (異なる ℓ 個のものから2個をとりだす場合の数) だけの粗代替・粗補完あるいは代替・補完の関係があることになる。すると，財の需要は連関性によって網の目のように相互につながっていることになる。連関性の網の目を通じて，ある財価格の変化がいろいろな財の需要に変化を与えるのである。需要関数を $x_j(p_1, \dots, p_\ell, I)$ とあらゆる価格に依存するように書いて来たのは，暗黙のうちに各財が相互に関連していることを想定していたのである。

品質の劣る財と見られるものを下級財 inferior goods または劣等財とよぶ。

定義 3.3 第 j 財が下級財であるのは，所得の増加 (減少) が第 j 財の需要の減少 (resp. 増加) をもたらす，つまり，

$$\frac{\partial x_j}{\partial I} \leq 0$$

を満たすものである。

品質の劣らない財を通常財 normal goods あるいは 上級財 superior goods とよぶ。

定義 3.4 第 j 財が下級財であるのは、所得の減少（増加）が第 j 財の需要の減少（resp. 増加）をもたらす、つまり、

$$\frac{\partial x_j}{\partial I} \geq 0$$

を満たすものである。

さらに、次のような性質の財を定義する。

定義 3.5 第 j 財がギッフェン財 Giffen goods であるのは、 p_j の減少（増加）が第 j 財の需要の減少（resp. 増加）をもたらす、つまり、

$$\frac{\partial x_j}{\partial p_j} \leq 0$$

を満たすものである。

上の定義によると、通常財とか下級財は他の財との関連で約束されているのではなく、その財独自の性質であると考えられている。つまり、「ある財が他のある財に対して下級財である」といった表現は出来ないことに注意しなければならない。また、下級財の特別なものにはギッフェン財となるものがあると考えられる。例えば、馬鈴薯を取上げてみる。ある家計が馬鈴薯を主食にしていたとする。馬鈴薯の価格が下がれば、所得にゆとりが出来て、むしろ馬鈴薯の需要を減らして牛肉を需要するようになるかもしれない。このようなことが起これば、馬鈴薯の価格の下落が馬鈴薯の需要を減少させたということになる。

ギッフェン財が端的に示すことは、価格変化には「それに伴う実質所得の変化」が重要な役割を果たしているということである。例えば、上述の馬鈴薯と牛肉では、それが本来の二財の連関性からみると代替関係にあって、価格変化からはそれを観測させないということがある。前節で行った所得効果と代替効果の分解は、それらを混在させないで純粋な形で抜き出すための作業であったのである。

代替効果の性質

財の数が $\ell = 2$ である場合には $S_{12} = S_{21} > 0$ となり、代替関係しか存在しない。財の数が2より大きい一般的なケースにはそれを言うことはできないが、代替関係が補完関係に優越するであろう「状況証拠」を示すことができる。そのために、代替項の性質を研究してみよう⁵。

法則1 $S_{ij} = S_{ji}, i, j = 1, 2, \dots, \ell$

この法則は第 j 財価格の変動がおよぼす第 i 財需要への代替効果は、第 i 財価格の変動がおよぼす第 j 財需要へのそれと同じであることを主張している。この法則の成立は D が対称行列の行列式であることから従う。

法則2 $S_{ii} < 0, i = 1, 2, \dots, \ell$

これは、代替項に関する限り自己の価格上昇は需要を減少させることを示している。したがって、上で定義したギッフェン財は (i) 下級財で、(ii) 所得効果が代替効果を上回る、ということから生じるのである。上で「特別な下級財」という表現をしたのはこのような理由であった。

法則3 $\sum_{j=1}^{\ell} p_j S_{ij} = 0, i = 1, 2, \dots, \ell$

この性質は行列式の余因子展開の形から容易に導出できる。

法則4 $\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n p_j p_i S_{ij} < 0, \text{ for } n < \ell$

この性質を導出することはここではしないが、行列式に関するヤコビの定理より得られることを示唆するに止めよう。法則4を念頭において商品群 group of commodities を考察しよう。いま商品の集合 $\{1, \dots, n\}$ が一つの商品群であるとは、このグループの中では相対価格は変化しないと定義される。つまり価格の間に

$$p_i = \alpha_i p_1, i = 1, 2, \dots, n$$

となるような固定的な係数 α_i が存在するということである。このとき、 $\mathbb{X} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(p_1, \dots, p_\ell, I)$ を商品群への需要と定義する。 p_1 がこの商

⁵J.R. Hicks (1956) *Value and Capital* 代替項の六則、参照。

品群の価格（代表価格）である。いま， p_1 が変化したとき，これまでの結果から，

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{X}}{\partial p_1} &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \alpha_j \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \frac{\partial x_i}{\partial p_j} \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j \left(S_{ij} - x_j \frac{\partial x_i}{\partial I} \right)\end{aligned}$$

となる。すると，法則 4 はこの商品群の代替項 $\mathbb{S} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \alpha_j S_{ij}$ が負値であることを主張している。つまり，商品群に関して法則 2 が成立することを示している。

代替関係の優越性

さて，これまでは代替財とか補完財には単に定義を与えただけにとどまっていた。粗代替財（粗補完財）であれば，ある財の需要は他の財価格の上昇に対して増加する（resp. 減少する）という性質を持つであろう。では，粗代替と粗補完のどちらが多く見受けられるであろうか。経済を考察する上で需要関数が多大な役割を演じるのであるから，この問題にある程度の見通しを持っておくことは経済学を構築する上で重要である。

以下に説明することは，補完関係に比べて代替関係の方がたくさん存在するであろうという「代替関係の優越性」である^{6,7}。まず，法則 2 と 3 から 2 財経済では代替関係しか存在しないのは明らかである。では， l 財経済ではどうであろうか。実は， l 財経済でも代替関係が多いと信すべき理由がある。いま，ある財 i を取上げ，他の財の全てを 1 つのグループとし

⁶ 「代替関係の優越性」は Hicks, J.R. (1946) *Value and Capital*, 2nd ed., Oxford University Press によってはじめて主張されたことである。

⁷ 以下の説明は入谷 (1977) 「連関財の理論と代替関係の優越性」『大阪大学経済学』，第 26 巻 3・4 号，48-57 に基づいている。他に，Kamien, N.I. (1964) “A Note on Complementarity and Substitution,” *International Economic Review*, Vol. 5, 221-227 も参照されたい。

て1つの商品群とみなしてみる。つまり、1つの財 i と1つの商品群とからなる2財経済と理解することができる。すると、代替関係しかあり得ない。法則4から知れるように、商品群の中に財 i と代替財になるものが存在しなければならない。しかも最初に選ぶ財 i は任意でよいので、多くの代替関係を見出すことができる。また、任意の2つの財をまとめて1つの商品群とみ、他の全部を1つの商品群と考えてみる。するとやはり、代替関係しか存在しない。これは2つの財の少なくともどちらか一方と残りの商品群に属するある財とが代替関係であることを意味している。この議論をどんどん続けて行くと、 ℓ 財経済でも数多くの代替関係が見出されるということになる。

上の議論をいま少し正確に展開してみよう。第一財に注目して、法則2, 3から、ある財 $k(> 1)$ が存在して $S_{1k} > 0$ である。いまインデックスの集合 $\{2, \dots, \ell\}$ に財の番号の付け替えを行って $k=2$ とできる。もちろん、番号の付け替えを行っても上述の法則1-4が成立することは言うまでもない。新たな番号付けに従って、財 $\{1, 2\}$ について法則3, 4を考慮すると、

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_i p_j S_{ij} + \sum_{i=1}^2 \sum_{j=3}^{\ell} p_i p_j S_{ij} = 0$$

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 p_i p_j S_{ij} < 0$$

である。よって、ある番号 $k(> 2)$ が存在して、 $S_{ik} > 0, i = 1 \text{ or } 2$ が成立する。再び $k=3$ となるように財の番号の付け替え[†]を行うと、

$$S_{i_2 2} > 0, S_{i_3 3} > 0, i_2 = 1, i_3 = 1 \text{ or } 2$$

となる。このような番号の付け替えを行っても上述の法則1-4はまだなお成立する。

[†] 財の番号 $\{1, 2\}$ についてはそのまま、番号 $\{3, 4, \dots, \ell\}$ について番号の付け替えをすることに注意。

さらに、財 $\{1, 2, 3\}$ について法則 3, 4 を考慮すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i p_j S_{ij} + \sum_{i=1}^3 \sum_{j=4}^{\ell} p_i p_j S_{ij} &= 0 \\ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 p_i p_j S_{ij} &< 0 \end{aligned}$$

である。よって、ある番号 $k (> 3)$ が存在して、 $S_{ik} > 0, i = 1, 2$ or 3 が成立する。再び $k = 4$ となるように財の番号の付け替えを行うと、

$$S_{i_2 2} > 0, S_{i_3 3} > 0, S_{i_4 4} > 0, i_j < j, j = 2, 3, 4$$

となる。以上の手続きを繰り返すと、

$$S_{i_j j} > 0, i_j < j, j = 2, 3, \dots, \ell \quad (3.13)$$

に至る。(3.13) は少なくとも $\ell - 1$ 個の代替関係があることを示している。

いま 1 つ代替関係が多く存在する原因がある。例えば、3 財を考えて、財 A は財 B の代替財で、同時に財 B は財 C の代替財であるとしてみよう。このとき、財 A は財 C の代替財になるのが自然である。例えば、コーヒーが紅茶の代替財で、紅茶がココアの代替財なら、コーヒーはココアの代替財になっているのである。この代替財の連鎖はヒックス・森嶋の連鎖ルールの一部であるが、人間の選好にはよくある性質であるように思われる。仮にこの連鎖ルールを認めると、代替関係はますます増加するであろう。実際、次の定理が成立する。

定理 3.1 代替財にかんするヒックス・森嶋の連鎖ルール (代替財の代替財は代替財である) を認めれば、あらゆる 2 財は代替関係にある。

[証明] 関係 (3.13) が成立するような財番号の付け方が存在する。その番号の付け方が採用されているものとし、番号 j に関する帰納的な証明を与える。

(Step 1) $j = 2$ とする。(3.13) より、 $S_{i_2 2} = S_{12} > 0$ である[†]。

(Step 2) $j < \ell$ について、 $S_{kt} > 0, k = 1, 2, \dots, t-1, t = 2, 3, \dots, j$ が成

[†] $1 \leq i_2 < 2$ であることに注意。

立していると仮定する。 $j+1$ について、(3.13) よりある番号 $i_{j+1} (\leq j)$ が存在して $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ である。任意の $i, i < i_{j+1}$ について仮定により、 $S_{ii_{j+1}} > 0$ であるから、連鎖ルールより $S_{ij+1} > 0$ である[†]。従って、 $i_{j+1} = j$ の場合には、

† 不等号 $S_{ii_{j+1}} > 0$ かつ $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから $S_{ij+1} > 0$ である (連鎖ルール)

$$S_{ij+1} > 0, \text{ for all } i < j+1 \quad (3.14)$$

となる。次に $i_{j+1} < j$ のケースを考察する。 $i_{j+1} < i < j$ となる財 i については仮定により、 $S_{ij} > 0$ であり、さらに、 $S_{i_{j+1}j} = S_{ji_{j+1}} > 0$ かつ $S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから、連鎖ルールより $S_{ij+1} > 0$ である。最後に、 $S_{i_{j+1}j} = S_{ji_{j+1}} > 0, S_{i_{j+1}j+1} > 0$ であるから、再び連鎖ルールによって、 $S_{jj+1} > 0$ に至る。これは、(3.14) がどのようなケースについても成立することを意味する。

(Step 3) 以上の論証によって、あらゆる2財の連関性は代替関係である。■

代替財に関するヒックス・森嶋の連鎖ルールをすべての財に適応できるかどうかには議論の余地がある。適用できる範囲が広ければ代替関係は補充関係に優越するようになるであろう。このようにして、代替関係の優越性 substitution dominancy が主張される。

市場需要に関する性質

これまでの議論では家計の数は1であった。何人かの家計が存在する経済を想定してみよう。どの家計でも代替関係は優越するということが代替関係の優越性であった。市場需要関数 market demand function とは各家計の個別需要の合計である。第 k 家計の第 j 財への需要関数を $x_j^k(p, I^k)$ とするとき、家計の数が m であれば、

$$x_j(p) = x_j^1(p, I^1) + x_j^2(p, I^2) + \cdots + x_j^m(p, I^m)$$

が第 j 財の市場需要である。ここで、 I^k は第 k 家計の所得である。

第 i 財の価格が変化したときの市場需要の変化について考えよう。定義により価格が変化したときの市場需要の変化は、価格が変化したときの個

別需要の変化の合計である。価格が変化したときの個別需要の変化は代替効果と所得効果の合計である。したがって、

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial x_j^k}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^m S_{ji}^k - \sum_{k=1}^m x_i^k \frac{\partial x_j^k}{\partial I^k} \quad (3.15)$$

＝代替項の合計＋所得項の合計

となる。 S_{ji}^k は第 k 家計の第 i 財価格が変化した時の第 j 財の需要におよぼす代替効果である。同様に $-x_i^k \partial x_j^k / \partial I^k$ は所得効果である。

まず $j \neq i$ として上の式を考察してみよう。代替関係の優越性があれば、 $S_{ji}(i \neq j)$ のほとんどは正值であろう。従って、(3.15) 式の右辺第 1 項は大きな正の値になると予想できる。次に (3.15) 式の右辺第 2 項について考察しよう。ある財が下級財であるか上級財であるかは、家計によって異なるであろう。家計全員がある財を下級財、あるいは、上級財と思うのは少ないであろう。右辺第 2 項は家計の数だけの合計であるから、所得効果は家計の間で相殺され、平均的な値に落ち着くことになる。社会全体で見ると、代替効果の合計が所得効果の合計を上回るという傾向を持つようになるのである。つまり、(3.15) 式の左辺は正值となる傾向を持つであろう。定義 7 はある財が他のある財の粗代替財であることの、1 人の家計にとっての定義である。これを参考にして、定義 7 中の「需要」を「市場需要」で置き換えることによって、市場全体での粗代替財を定義できる。すると、たいていの財は他の財の市場全体での粗代替財となるであろうと予想できる。

あらゆる財が他の財の、市場全体で粗代替財であると仮定して、経済の理論を構築することには十分な理由があるようである。

次に、 $j = i$ の場合を考察しよう。法則 2 より S_{ii} はいつも負の数である。(3.15) 式の右辺第 1 項は、各家計について負値であるから、絶対値の大きい負の数であると考えてよい。右辺第 2 項は、すでに考察したように、相殺されて社会的に平均的な値になるであろう。すると、(3.15) 式の左辺は、たいていの場合、負値となると予想できる。このようにして、市場全体で『価格が下がると需要が増加する [(3.15) の左辺 < 0] (需要曲線の右下がり性)』が成立することになる。この性質を需要法則 law of demand

とよぶ⁸。

需要法則が成立つような経済を想定することにも，十分な理由があるようである。

3.4 数学付録

陰関数定理

経済学の基本的用具として，陰関数定理 implicit function theorem がある。経済学の応用分野において，陰関数定理は極めて重要で，この定理を用いない分野はほとんどない。ある意味では，ラグランジュ法による必要条件の導出とその必要条件を陰関数定理を適切に用いることによって解の性質を抽出することができれば，経済学のプロとしての技量の基礎があると言って過言ではない。本章で代替項と所得項の分解をいささか古典的な手順に従って解説をしたのは⁹，陰関数定理の利用の典型例となっているからに他ならない。

定理 3.2 [陰関数定理 (implicit function theorem)][†]

関数 $g(x, y) = (g^1(x, y), g^2(x, y), \dots, g^n(x, y))^t$ を \mathbb{R}^m の点 \tilde{x} の近傍 $M_1(\tilde{x})$ と \mathbb{R}^n の点 \tilde{y} の近傍 $M_2(\tilde{y})$ とで連続とし，

$$g(\tilde{x}, \tilde{y}) = (0, \dots, 0)^t$$

とする。つまり， \tilde{y} は連立方程式 $g(\tilde{x}, y) = (0, \dots, 0)^t$ の解であるとする。 $g(\cdot, \cdot)$ は $y \in M_2(\tilde{y})$ について連続的に微分可能で， (\tilde{x}, \tilde{y}) においてヤコビ行列式 (Jacobian determinant) がゼロでない，すなわち，

$$\begin{vmatrix} g_1^1 & \cdots & g_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_1^n & \cdots & g_n^n \end{vmatrix} \neq 0, \quad g_j^i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial g^i(\tilde{x}, \tilde{y})}{\partial y_j}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n$$

⁸連続体上に多くの経済主体が存在する巨大経済 Large Economy で需要法則を研究しているものに，Hildenbrand, W. (1983) "On the "Law of Demand"," *Econometrica*, Vol.51, No.4, 997-1019. がある。

⁹双対的な手法で所得項と代替項を分解するのが現代的な方法であろう。

[†] 入谷・久我『数理経済学入門』第8章参照。

とする。このとき $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ の近傍 $N_1(\tilde{x})$ と $\tilde{y} \in \mathbb{R}^n$ の近傍 $N_2(\tilde{y})$, さらに, $N_1(\tilde{x})$ から $N_2(\tilde{y})$ への写像 $\phi(x) : N_1(\tilde{x}) \rightarrow N_2(\tilde{y})$ が存在して $\tilde{y} = \phi(\tilde{x})$, かつ, 任意の $x \in N_1(\tilde{x})$ について $g(x, \phi(x)) = 0$ が成立する。もし, $g(x, y)$ が (x, y) について k 回連続微分可能であれば, $\phi(x)$ は k 回連続微分可能である。

第4章 凸解析による接近

前の二つの章で考察したことは、第1章の問題 (1.1) の解の近傍での議論であった。例えば、陰関数定理を用いた需要関数の連続性はやはり局所的にしか与えられていない。この章では需要関数の連続性を大域的に扱う方法を紹介する。本章においても消費者の問題 (1.1) をキーにして議論が展開するが、すべての価格と所得は正であり、効用関数に関して局所非飽和が成立し、連続かつ単調であると仮定する。

4.1 準凹性

最も重要な概念は効用関数の準凹性である。効用関数の準凹性は、直感的には2時限の無差別曲線が原点に向かって凸であることを表現するものである。

次の定義を準備する。

定義 4.1 効用関数 $u(x), x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が準凹 quasi concave であるとは、任意の $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+^\ell$ 、任意の $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ について、

$$u(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) \geq \min(u(x^1), u(x^2))$$

が成立することである。

定義 4.2 \mathbb{R}^n の部分集合 X が凸集合 convex set であるとは、 X の任意の二点 $x, x' \in X$ と任意の $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ に対して、

$$\lambda x + (1 - \lambda)x' \in X$$

が成立することである。

問題 準凹関数，凸集合の定義を図によって直観的に把握しなさい。

準凹関数の定義域は凸集合でなければならないことに注意せよ。上では効用関数の定義域が \mathbb{R}_+^ℓ であり凸集合であるから，それを明示していない。

次の定理は準凹関数の理解に役立つであろう。

定理 4.1 関数 $u(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が準凹関数であることの必要十分条件は任意の実数値 v に対して，集合

$$C_v \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(x) \geq v\}$$

が凸集合であることである。

[証明] (必要性) $u(\cdot)$ を準凹関数とする。 v を任意の実数値とする。 $x, x' \in C_v$, $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ とすれば， u の準凹性によって，

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq \min(u(x), u(x'))$$

である。 $\min(u(x), u(x')) \geq v$ は自明であるから， $u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq v$ したがって， $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in C_v$ である。

(十分性) 任意の実数値 v に対して C_v が凸集合であるとする。任意の二点 $x, x' \in \mathbb{R}_+^\ell$ と任意の実数値 $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$ を選んでおく。いま， $v = \min(u(x), u(x'))$ とすれば， $x, x' \in C_v$ である。 C_v は凸集合だから， $\lambda x + (1 - \lambda)x' \in C_v$ である。したがって，

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)x') \geq v = \min(u(x), u(x'))$$

となる。これは u が準凹関数であることを意味する。■

この定理によって、「無差別図表が原点に向かって凸であること」が効用関数の準凹性によって十全に表現されることが判る。

定義 4.3 効用関数 $u(x)$, $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が狭義準凹 strictly quasi concave であるとは，任意の $x^1, x^2 \in \mathbb{R}_+^\ell$ ，任意の $\lambda, 0 < \lambda < 1$ について，

$$u(\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2) > \min(u(x^1), u(x^2))$$

が成立することである。

定理 4.2 効用関数 u が厳密に準凹であるならば，第 1 章の (1.1) の解は一意的 unique である。

[証明] いま (1.1) に異なる二つの解 x, x' が存在したとする。つまり， $u(x) = u(x')$ かつ $px = px' = I$ である。狭義準凹性から，

$$u\left(\frac{x}{2} + \frac{x'}{2}\right) > u(x) = u(x')$$

が成立する。かつ， $p(x/2 + x'/2) = I$ も自明である。これは x, x' が解であることに矛盾する。従って (1.1) の解は一意的である。■

前章では需要が関数となることは必ずしも明らかではなかった¹。この定理によって，効用関数に狭義準凹性があれば，需要は全域的に関数として取り扱うことができる。このようにして，任意の $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ に対して，需要 $x(p, I) = (x_1(p, I), \dots, x_\ell(p, I))$ が定義できる。これは需要関数 demand function である。

定理 4.3 (需要関数の連続性) 効用関数 $u(\cdot)$ が狭義準凹かつ連続であれば，需要関数 $x(p, I)$ ， $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^\ell \times \mathbb{R}_{++}$ は連続である。

[証明] 価格と所得 $(p, I) \in \mathbb{R}_{++}^\ell \times \mathbb{R}_{++}$ を任意に選んでおく。 (p^ν, I^ν) を (p, I) に収束する価格と所得の列とする[†]。仮定により，任意の ν について， $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ かつ $I^\nu \in \mathbb{R}_{++}$ であるとしてよい。価格と所得が (p^ν, I^ν) であるときの需要，つまり，(1.1) の解を x^ν とする。

[†] 連続性の定義 1.6 を参照せよ。

$[a, b]$ は実数の閉区間で集合で書けば $\{r \in \mathbb{R} \mid a \leq r \leq b\}$ のことである。

$$x^\nu \in \left[0, \frac{\sup\{I^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}{\inf\{p_1^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}\right] \times \dots \times \left[0, \frac{\sup\{I^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}{\inf\{p_\ell^\mu \mid \mu = 1, 2, \dots\}}\right],$$

$$\nu = 1, 2, \dots$$

である。この右辺はコンパクト集合であるから，収束する部分列が存在する。その収束先を x^* とする。

¹ 任意の解において，第 2 章での十分条件（あるいは正則条件）が成立すれば，解は有限個であることがわかる。Debreu, G. (1970), “Economies with a finite set of Equilibria,” *Econometrica*, Vol.38, No.3, 387-392 参照。

いま, 予算制約を満たす消費の組み合わせ $B \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid px \leq I\}$ を定義する。同様に, 集合列 $B^\nu \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid p^\nu x \leq I^\nu\}$, $\nu = 1, 2, \dots$ を定義する。 $x^* \in B$ であることに注意しておく。 任意の $x \in \mathbb{R}_+^\ell$, $px \leq I$ を1つ選んでおく。 $x = 0$ であれば, $x \in B^\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$ であることは自明である。 $x \neq 0$ であれば, $\varepsilon > 0$ を任意に選んでおくと

$$0 \leq x_\varepsilon \leq x, \quad px_\varepsilon < I, \quad \|x - x_\varepsilon\| < \varepsilon$$

を成立させる x_ε が存在する。積の連続性より, ある ν^0 が存在して, $\nu > \nu^0$ であれば, $p^\nu x_\varepsilon \leq I^\nu$ が成り立つ。これは, †

$$u(x_\varepsilon) \leq u(x^\nu)$$

を意味する。 $\nu \rightarrow \infty$ とすれば, u の連続性より,

$$u(x_\varepsilon) \leq u(x^*)$$

である。この不等号は任意の ε について成立するから,

$$u(x) \leq u(x^*)$$

となる。 x は B の任意の要素であるから, x^* は価格と所得が (p, I) の時の需要に他ならない‡。

以上の議論は元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ の任意の収束する部分列について成立する。したがって, これまでの議論を繰り返すと, その収束先 x^{**} も価格と所得が (p, I) の時の需要である。定理 3.2 によって $x^{**} = x^*$ であるから, 元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ の任意の収束する部分列の極限は x^* 自身である。これは, 元の列 x^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ が x^* 荷収束することを意味する ††。しかも, x^* が予算集合 B 上で効用を最大化することより, 需要関数の連続性が示された。■

定義 4.4 \mathbb{R}^n の凸集合 X 上 ††† で定義される実数値関数 f が凹関数 concave function であるとは, 任意の $x, y \in X$ かつ任意の λ ($0 \leq \lambda \leq 1$) について

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

† 消費ベクトル x_ε は価格と所得が (p^ν, I^ν) のときの予算を満たしているなのでその効用は最大値 $u(x^\nu)$ を越えない。

‡ 上の下線部に着目せよ。

†† 各自証明せよ。背理法を用いれば容易である。

††† 集合 X が凸集合であることを明記していることに注意。

が成立することである。また、 $-f$ が凹関数となる時、 f を凸関数 convex function であるという。

凹関数は準凹関数であるが、逆は必ずしも正しくない。したがって効用関数を凹関数と仮定することは大変制約的であることに注意をしておこう²。

4.2 準凹関数の必要条件と十分条件

前節で効用関数の準凹性が極めて良好な性質を需要関数に付与することが示された。準凹関数の性質を知悉しておくことは極めて重要である。ここでは、準凹関数の必要条件や十分条件を見ておこう。前節の定理 4.1 は微分可能性を仮定しないで得られる必要十分条件であった。ここでは、微分可能性を前提とした諸条件を提示する。

定理 4.4 関数 $u : \mathbb{R}_+^\ell \rightarrow \mathbb{R}$ を定義域の内点において連続微分可能とする。 u が準凹関数である必要十分条件は、任意の $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell$, $y \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について、

$$u(x) \geq u(y) \Rightarrow \nabla u(y)(x - y) \geq 0 \quad (4.1)$$

が成立することである。ここで、

$$\nabla u(y) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}(y), \dots, \frac{\partial u}{\partial x_\ell}(y) \right)$$

である[†]。

[†] ∇ はナブラと読む。

²Negishi, T. (1960) "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica*, 92-97.

は効用関数を凹関数に限定することによって、競争均衡の存在について新しい証明を与えている。この論文ではパレート効率性と個人主義的社会的厚生関数との関係が存在証明の中で統一的にとらえられていて、大変重要な意義を持っている。近年になって、Negishi のアイデアは MasColelle, A. (1986) "The Price Equilibrium Existence Problem in Topological Vector Lattices," *Econometrica*, 1039-1054.

によって continuum many traders の枠組みで再構築されている。

[証明](必要性) u を準凹関数とする。 $x, y \in \mathbb{R}_+^\ell, y \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について, $u(x) \geq u(y)$ が成立したとする。任意の $\lambda, 0 < \lambda < 1$ について,

$$u(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq u(y)$$

である。一方, テーラー展開を利用して, ある $\theta, 0 < \theta < 1$ が存在して,

$$\begin{aligned} u(\lambda x + (1 - \lambda)y) &= u(y + \lambda(x - y)) \\ &= u(y) + \lambda \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} 0 &\leq u(\lambda x + (1 - \lambda)y) - u(y) = \lambda \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \\ &0 \leq \nabla u(y + \theta \lambda(x - y))(x - y) \end{aligned}$$

である。この最後の式において, λ をゼロに近づけてやると, u が連続微分可能であるから,

$$0 \leq \nabla u(y)(x - y)$$

に至る。

(十分性) 略 ■

定理 4.5 X を \mathbb{R}^n の凸開集合とする。 $f(x)$ を X 上で定義された 2 回連続微分可能な実数値関数とする。 $f(x)$ が準凹関数であることの必要条件是任意の $x \in X$ にたいして,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (4.2)$$

となることである。ここで, $f_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial f / \partial x_i(x)$, $f_{ij}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \partial^2 f / \partial x_j \partial x_i(x)$ である。

逆に任意の $x \in X$ について,

$$(-1)^k \begin{vmatrix} 0 & f_1(x) & \cdots & f_k(x) \\ f_1(x) & f_{11}(x) & \cdots & f_{1k}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(x) & f_{k1}(x) & \cdots & f_{kk}(x) \end{vmatrix} > 0, \quad k \in \{2, 3, \dots, n\} \quad (4.3)$$

であれば, $f(\cdot)$ は狭義準凹関数である。したがって準凹関数である。

定理 4.6 X を \mathbb{R}^n の凸開集合とする。 $f(x)$ を X 上で定義された 2 回連続微分可能な実数値関数とする。 $f(x)$ が凹関数であることの必要十分条件は任意の $x \in X$ と $h \in \mathbb{R}^n$ にたいして,

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x) \leq 0 \quad (4.4)$$

となることである。

(4.4) の必要十分条件は, 任意の k 個の異なるインデックス $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, 2, \dots, n\}$ について

$$(-1)^k \begin{vmatrix} f_{i_1 i_1}(x) & \cdots & f_{i_1 i_k}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{i_k i_1}(x) & \cdots & f_{i_k i_k}(x) \end{vmatrix} \geq 0, \quad k \in \{1, 2, \dots, n\} \quad (4.5)$$

が成立することである。ここで, $f_{ij} = \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ である。

4.3 支出関数

いま, 効用関数 u が \mathbb{R}_+^ℓ で定義される連続かつ単調な準凹関数で, \mathbb{R}_{++}^ℓ 上では狭義単調かつ狭義準凹関数であり[†], 二回連続微分可能であるとする。

$$\partial \mathbb{R}_+^\ell \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \text{ある } i (1 \leq i \leq \ell) \text{ について } y_i = 0\}$$

[†] このように境界を除いて狭義準凹としているのはなぜかを考えてみよう。

と定義する。さらに,

$$u(y) = \inf\{u(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^\ell\}, \text{ if } y \in \partial\mathbb{R}_+^\ell \quad (4.6)$$

が成立するものとする。さらに, \mathbb{R}_{++}^ℓ における u の微分は正值であると仮定する。

\bar{u} を一つの実数とする。集合

$$I_{\bar{u}} \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}_+^\ell \mid u(x) \geq \bar{u}\}$$

を定義する。集合 $I_{\bar{u}}$ は凸集合かつ閉集合である。凸集合であることは u の準凹性から, 閉集合であることは u の連続性から従う。ここで, $I_{\bar{u}}$ が非空である $\bar{x} \in \mathbb{R}_{++}^\ell$ について $\bar{u} = u(\bar{x})$ であると仮定する。このとき, $y \in \partial\mathbb{R}_+^\ell$ となる消費ベクトル y について, $y \notin I_{\bar{u}}$ であることに注意しておく[†]。

そこで, 問題

$$\min_x p_1 x_1 + \cdots + p_\ell x_\ell \quad \text{subject to } x \in I_{\bar{u}} \quad (4.7)$$

を考察する。この問題の解を $I(p_1, \dots, p_\ell, \bar{u})$ と書く。これを価格と効用水準の関数と見て支出関数 expenditure function と呼ぶ。第3章において補償所得を考察したが, 現在のものがいま一つの表現である。

定理 4.7 関数 $I(p_1, \dots, p_\ell, \bar{u})$ は (p_1, \dots, p_ℓ) について凹関数である。

[証明] $p^k \stackrel{\text{def}}{=} (p_1^k, \dots, p_\ell^k)$, $k = 1, 2$ を任意の正のベクトルとする。任意の λ , $(0 \leq \lambda \leq 1)$ に対して, $p^3 = \lambda p^1 + (1 - \lambda)p^2$ とする。 p^k に対応する (4.7) の解を x^k , $k = 1, 2, 3$ とする。よって,

$$\begin{aligned} I(p^3, \bar{u}) &= p^3 x^3 \\ &= \lambda p^1 x^3 + (1 - \lambda) p^2 x^3 \\ &\leq \lambda I(p^1, \bar{u}) + (1 - \lambda) I(p^2, \bar{u}) \end{aligned}$$

である。■

[†] 各自証明を試みなさい。

補助定理 4.1 任意の正の価格 p 任意の実数 \bar{u} を固定する。 $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ であれば、問題 (4.7) の解は $I_{\bar{u}}$ に存在する。したがって支出関数は存在する。

[証明] 仮定によって $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ であるから、 $x \in I_{\bar{u}}$ となる $x \in \mathbb{R}_+^\ell$ が存在する。 $p > 0, I_{\bar{u}} \subset \mathbb{R}_+^\ell$ であるから、実数の集合 $S \stackrel{\text{def}}{=} \{py \in \mathbb{R} \mid y \in I_{\bar{u}}\}$ は非空で下に有界である (0 が一つの下界である)。よって S には下限 s が存在する[†]。 $s = px$ である場合は解の存在は自明である。 $s < px$ の場合を考察しよう。いま、 ν を任意の自然数とすると、 $s + 1/\nu$ は下限ではない。よって或る $x^\nu \in I_{\bar{u}}$ が存在して、

$$s \leq px^\nu \leq s + \frac{1}{\nu}$$

が成立する。このようにして、 $I_{\bar{u}}$ の中に列 $x^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ がとれる。十分大きな ν ($1/\nu < px - s$) について、 $px^\nu \leq px$ である。よって、 $x_j^\nu < px/p_j$ である。よって、 x^ν は収束する部分列を持つ。収束先を x^* とすると、これまでの議論より

$$s = px^*$$

が成立する。さらに、 $u(x^\nu) \geq \bar{u}$ は任意の ν について成立するから、 $u(\cdot)$ の連続性から $u(x^*) \geq \bar{u}$ したがって、 $x^* \in I_{\bar{u}}$ である。よって下限 s は最小値であり、(4.7) の最小値は存在する。最小値は一意であることは明らかであるから、 $I(p, \bar{u})$ は関数である。■

【注意】定理 4.7, 補助定理 4.1 には、ここで仮定されている条件のなかで u の連続性と $I_{\bar{u}}$ の非空性以外は必要ではない。 u の連続性も問題 (4.7) を最小化ではなくて、下限を見つける問題、すなわち、

$$\inf_x p_1x_1 + \dots + p_\ell x_\ell \quad \text{subject to } x \in I_{\bar{u}}$$

とすれば、必要ではない。ただし、補助定理 4.1 の「 $x^* \in I_{\bar{u}}$ 」は必ずしも成立せず、「 $x^* \in \mathbb{R}_+^\ell$ 」で成立する。したがって定理 4.7, 補助定理 4.1 は極めて一般的に確立される。したがって、 $I(p, \bar{u})$ が p の連続関数であること

[†] 下に有界な実数の集合には下限が存在する：実数の基本的な性質。

は効用関数の狭義準凹性に係わらない(各自試みよ)³。さらに、補助定理 4.1 において、効用関数が狭義準凹であれば、(4.7) の最小値を与える x は一意であることを示すことは易しい(各自試みよ)。

問題 仮定 (4.6) のもとでは、価格列 $p^\nu \in \mathbb{R}_{++}^\ell$, $\nu = 1, 2, \dots$ について $\nu \rightarrow \infty$ の時 $p^\nu \rightarrow p \in \mathbb{R}_+^\ell$ とする。この時、

$$p_j = 0 \text{ ならば } x_j^i(p^\nu) \rightarrow \infty$$

となることを示しなさい。

補助定理 4.2 条件 (4.6) を仮定する。任意の正の価格 p を固定する。

$$\bar{u} > \inf\{u(x) \mid x \in \mathbb{R}_+^\ell\}$$

であれば、問題 (4.7) の解は \mathbb{R}_{++}^ℓ に存在する。

[証明：略]

ここで、効用関数の 2 回連続微分可能性を仮定する。さらに、 $I_{\bar{u}} \neq \emptyset$ を仮定する。問題 (4.7) は不等号制約のある最小化問題であるが、効用関数が単調であることが仮定されているから、

$$\max -p_1x_1 - \dots - p_\ell x_\ell \text{ subject to } u(x) = \bar{u}$$

と同値である。よって 2 章で紹介した定理 2.1 (ラグランジュの未定乗数法) を用いることができる。ラグランジュ関数を

$$L(x, \mu) = -p_1x_1 - \dots - p_\ell x_\ell + \mu(u(x) - \bar{u})$$

³ p に関する連続性は定理 4.7 の含意でもある。Rockafellar, R.T. *Convex Analysis* (1970, Princeton University Press) の 82 page には、次の定理がある。

Theorem 10.1. A convex function f on \mathbb{R}^n is continuous relative to any relatively open convex set C in its effective domain, in particular relative to $\text{ri}(\text{dom} f)$.

つまり、「凸関数や凹関数は定義域の境界を除けば連続である」という内容が成立するのである。

とする。補助定理 4.1 より問題 (4.7) には解があるから、次の必要条件を得る。すなわち、ある μ^* が存在して、 μ^* と解 $x^* = (x_1^*, \dots, x_\ell^*)$ は

$$u(x_1, \dots, x_\ell) - \bar{u} = 0$$

$$\mu \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) - p_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, \ell$$

を満たす。ここで、ヤコービアン[†]

$$\begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_\ell \\ u_1 & \mu u_{11} & \dots & \mu u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & \mu u_{\ell 1} & \dots & \mu u_{\ell\ell} \end{vmatrix} = (\mu)^{\ell-1} \begin{vmatrix} 0 & u_1 & \dots & u_\ell \\ u_1 & u_{11} & \dots & u_{1\ell} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_\ell & u_{\ell 1} & \dots & u_{\ell\ell} \end{vmatrix} \neq 0$$

ヤコービアン Jacobian と言う時はヤコビ行列式 Jacobian determinant を指すことに注意。

が $x = x^*$, $\mu = \mu^*$ で成立すると仮定する。(4.3) や第 2 章で学んだ十分条件 (2.11) とが成立していれば、この条件が成立することに注意をしておきたい。

以上の準備によって、陰関数定理を用いれば、 $x(p, \bar{u}) = x^*$ を満たす解が局所的に微分可能な関数として得られる。したがって、

$$\bar{u} = u(x_1(p, \bar{u}), \dots, x_\ell(p, \bar{u}))$$

は p について恒等式である。 p_i に微分をして、ラグランジュ条件を考慮すると、

$$0 = u_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + u_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u})$$

$$= \mu p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + \mu p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u})$$

よって

$$0 = p_1 \frac{\partial x_1}{\partial p_i}(p, \bar{u}) + \dots + p_\ell \frac{\partial x_\ell}{\partial p_i}(p, \bar{u}) \quad (4.8)$$

となる。一方, $I(p, \bar{u}) = p_1 x_1(p, \bar{u}) + \cdots + p_\ell x_\ell(p, \bar{u})$ を考慮すると,

$$\frac{\partial I}{\partial p_i}(p, \bar{u}) = x_i(p, \bar{u}) + \sum_{j=1}^{\ell} p_j \frac{\partial x_j}{\partial p_i}(p, \bar{u})$$

よって (4.8) を考慮すれば

$$\frac{\partial I}{\partial p_i}(p, \bar{u}) = x_i(p, \bar{u}) \quad (4.9)$$

が成立する。等式 (4.9) をマッケンジーの補題 McKensie's lemma と呼ばれる。これは, 第3章の (3.10) で得られたものと正確に同じである。

同様の議論が生産の理論の費用関数 cost function についても可能である。つまり, \bar{u} をある生産物の生産水準, u を生産関数とみなしてみる⁴。すると, $I_{\bar{u}}$ は等量線の東北部分の領域を示している。すると, 問題 (4.7) は与えられた生産量 \bar{u} を生産するための最小の費用を求めるものとなる。このようにして, 与えられた生産量に対して費用が定義できる。これが費用関数である。通常, 費用関数は生産量の関数として書かれることが多いが, 正確には, 生産量と生産要素価格の関数となる。生産要素価格に関する費用関数の微分は上のマッケンジーの補題が, 全く同様にして, 成立する。これはマッケンジー・シェパードの補題と呼ばれる。

また, 不等号制約条件付きの準凹関数の最大化は「準凹計画問題」として1つのテーマとなっている。ここでは詳しくは解説しなかったが,

- (i) Arrow, K.J., and A.C., Enthoven (1961) "Quasi-Concave Programming," *Econometrica*, Vol.29, No.4, pp779-800.
- (ii) Mangasarian, O.L., *Nonlinear Programming*, (New York, McGraw-Hill, 1969) (関根智明訳『非線形計画法』培風館, 1972)。

を参考すれば, 有用な知識が得られる。筆者の経験からすれば, マンガサリアンは一読に値する。

⁴生産関数では準凹関数という仮定はなされないのが普通である。準凹関数では収穫逓増のケースを含んでいるからである。

第5章 交換の一般均衡

5.1 準備

以前の三つの章において、需要関数は十分に確立された。ここでは、最小限の一般均衡である「交換の一般均衡 general equilibrium of exchange」を解説する。次の記号を準備する。

1° $S \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in \mathbb{R}_+^\ell \mid \sum_{i=1}^\ell p_i = 1\}$: 価格の集合

2° $x_j^i(p), p \in \text{int}S \stackrel{\text{def}}{=} \{p \in S \mid p_j > 0, j = 1, \dots, \ell\}$
 : 第 i 家計の需要関数, $i = 1, 2, \dots, m, m$: 家計の数

3° $\omega^i \in \mathbb{R}_{++}^\ell$: 第 i 家計の初期保有

それぞれについて説明をしておこう。これまでの章では、家計の所得は外生的に与えられていた。ここでは、3°にあるように家計 i は財を所有しており、初期保有 $\omega^i = (\omega_1^i, \dots, \omega_\ell^i)$ が与えられている。ここで考察するのは、 m 人の家計が物々交換をする交換の一般均衡である。したがって所得は初期保有から得られるものしかない。したがって、第 i 家計の選択問題は

$$\max_{x^i \in \mathbb{R}_+^\ell} u^i(x^i) \quad \text{subject to } px^i \leq p\omega^i \quad (5.1)$$

ということになる。これまでの章では、この問題から個別需要関数が得られ $x^i(p, I^i), I^i = p\omega^i$ と書かれてきた。第1章で見たように、需要関数には価格と所得に関するゼロ次同次性がある。つまり、

$$x^i(\lambda p, \lambda p\omega^i) = x^i(p, p\omega^i), \quad \forall \lambda > 0$$

が成立する。したがって、 $\lambda = 1 / \sum_{i=1}^{\ell} p_i$ としてやることに何の問題もない。ここで、 $\sum_{i=1}^{\ell} \lambda p_i = 1$ を考慮すると、価格を

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ p \in \mathbb{R}_+^{\ell} \mid \sum_{i=1}^{\ell} p_i = 1 \right\}$$

に限定できることになる。これが 1° である。 S は $\ell - 1$ 次元シンプレックス、あるいは価格シンプレックスと呼ばれる。

さらに、所得 I^i は ω^i が固定されているため、価格 p のみで決まると考えることができる。従って需要関数を $x^i(p, p\omega^i)$ ではなく、まとめて $x^i(p)$ と書くことができる。さらに、これまでの章で見えて来たように需要関数はある財の価格がゼロの時には定義されていない。そのため、価格 p をシンプレックス S 全域ではなく、 S の内点の集合 $\text{int}S$ にしているのである。それが、2° である。

最後に、家計の個別需要の総計を市場需要と呼び、

$$x(p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m x^i(p)$$

と定義する。

5.2 競争均衡

以上のように需要が定義される時、経済における需要と供給のバランスは

$$x(p) = \sum_{i=1}^m \omega^i \tag{5.2}$$

によって表現される。左辺が総需要、右辺が総供給である。生産がないために表現が非常に簡単になっているが、生産を導入してもほとんど議論は変わらない。この等式は p に関する連立方程式である。(5.2) を成立させる価格 p^* を競争均衡価格 competitive equilibrium price という。また、その

時の価格と配分の組 $((x^i(p^*))_{i=1}^m, p^*)$ を競争均衡 competitive equilibrium と呼ぶ。

さて、競争均衡について考察するには、関数 $x(p)$ の振る舞いが分かっている方がよい。 $x(p)$ が持っている性質を網羅しておこう。これまでの章で見たように効用関数 u に適切な仮定があれば、個別需要関数 $x^i(p)$ は $p \in \text{int}S$ で連続となるようにできる。まず、個別需要関数は予算制約を満たすから、

$$px^i(p) \leq p\omega^i, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

である。これを家計について合算して、整理すると、

$$p \left(x(p) - \sum_{i=1}^m \omega^i \right) \leq 0 \quad (5.3)$$

が得られる。各家計の効用関数に局所非飽和性を仮定すれば、予算制約は等号で成立するから、(5.3) は

$$p \left(x(p) - \sum_{i=1}^m \omega^i \right) = 0 \quad (5.4)$$

となる。(5.3) や (5.4) は $\sum_{i=1}^m \omega^i$ が総供給であるから、総需要が総供給を超過する部分の価値額の合計が非正あるいはゼロであることを示している。これはワルラス法則 Walras law と呼ばれるものである。本章では (5.4) の形のワルラス法則を用いる¹。

また、 $p \in \partial S$ に収束する価格列 $p^\nu \in \text{int}S, \nu = 1, 2, \dots$ について

$$p_j = 0 \text{ ならば } x_j(p^\nu) \rightarrow \infty \quad (5.5)$$

を仮定する²。これは境界条件 boundary condition と呼ばれる。

¹ワルラス法則を (5.3) で議論する時には、需給バランスを不等号で表現した $x(p) \leq \sum_{i=1}^m \omega^i$ を用いるのが普通である。

²仮定 (4.6) のもとでは、 p に収束する価格列 $p^\nu \in \text{int}S, \nu = 1, 2, \dots$ について、

$$p_j = 0 \text{ ならば } x_j^i(p^\nu) \rightarrow \infty$$

が成立する。これは第3章での読者への課題であった。本章ではこの性質が市場需要関数について成立すると仮定されている。

さらに、 $p \in \partial S$ について財 k を $p_k \neq 0$ となる財とすれば、 p に収束する $\text{int}S$ 内の任意の価格列 p^v について、 k 財の需要の列 $x_k(p^v)$ には極限が存在し、その極限は価格列に依存しないと仮定する³。

以上の準備のもとに、(5.2) を眺めてみよう。まず、価格 p に関する連立方程式と見ることができる。しかし、需要関数のゼロ次同次性のために、価格は $\sum_{j=1}^{\ell} p_j = 1$ に基準化 normalize できる。そのため、未知数が $\ell - 1$ 個になる。一方、方程式の数は ℓ 個である。これでは解けない可能性があるということになるが、ワルラス法則 (5.4) があるため、方程式の数が 1 本減って $\ell - 1$ 個になる。未知数の数と方程式の数が一致し、解ける可能性は残されているのである。

5.3 競争均衡の存在

(C) 市場需要関数の $\text{int}S$ における連続性、(W) ワルラス法則、そして、(B) 境界条件、を前提として、競争均衡の存在を示しておこう。ここで用いられる手段はブラウワーの不動点定理である⁴。それは次のように述べられる。

定理 5.1 (Brouwer's Fixed Point Theorem) $f: S \rightarrow S$ を凸コンパクト集合 S からそれ自身 S への連続関数とする。ある点 $y^* \in S$ が存在して、 $f(y^*) = y^*$ が成立する。 y^* を不動点と言う。

不動点定理は凸コンパクト集合上での連続関数について述べられている。この定理を用いる時の一つの障碍は需要関数が価格シンプレックス S の全

³ 収束する価格列によって極限が異なる現象が存在する。そのような場合、 $x(p)$ は $\text{int}S$ で関数であっても、定義域を S に拡張した $\tilde{x}(p)$ は必ずしも「関数」ではなく「対応」となる。対応は、ある p について $\tilde{x}(p)$ が複数の要素を含む集合となることを許容する。Nikaido, H. (1968) *Convex Structure and Economic Theory*, Academic Press には関数を定義域と値域との積集合の中のグラフ(集合)として捉え、閉包を作る事によって「閉写像」に拡張する方法が示されている。拡張されたものは、一般には、対応である。本章では、定義域を拡張しても $\tilde{x}(p)$ が連続となるような想定をしている。この想定はいくぶん強い仮定であることに注意しておこう。

⁴ ブラウワーの不動点定理から競争均衡の存在が示されるが、「ブラウワーの不動点定理」と「競争均衡の存在」は同値であることが知られている。文献: Uzawa, H. (1962) "Competitive Equilibrium and Fixed Point Theorems, II: Walras Existence Theorem and Brouwer's Fixed Point Theorem," *Economic Studies Quarterly*, Vol.8, 59-62. を参照されたい。

域で定義されていないことである。それで次のような人工的な関数を定義する。 K を十分大きな正の定数, つまり, $K > \max(\sum_{i=1}^m \omega_1^i, \dots, \sum_{i=1}^m \omega_\ell^i)$ として, 各 $j = 1, 2, \dots, \ell$ について

$$\begin{aligned}\tilde{x}_j(p) &\stackrel{\text{def}}{=} \min(x_j(p), K), \text{ if } p \in \text{int}S \\ &\stackrel{\text{def}}{=} K, \quad \text{if } p_j = 0, p \in \partial S\end{aligned}$$

とする。

さらに, $p \in \partial S$ について, 財 k について $p_k \neq 0$ であれば, p に収束する $\text{int}S$ 内の価格列 $p^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ によって

$$\tilde{x}_k(p) = \lim_{\nu \rightarrow \infty} x_k(p^\nu)$$

と定義する。

このようにして定義された $\tilde{x}(p) \stackrel{\text{def}}{=} (\tilde{x}_1(p), \dots, \tilde{x}_\ell(p))$ は集合 S 全域で連続である。ただし, $\tilde{x}(p)$ についてワルラス法則は必ずしも成立しないことに注意をしておこう。

そこで, 任意の $p \in S$ に対して, 次の写像

$$\phi_j(p) = \frac{p_j + \max(\tilde{x}_j(p) - \sum_{i=1}^m \omega_j^i, 0)}{1 + \sum_{k=1}^{\ell} \max(\tilde{x}_k(p) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0)}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

を与える。関数 $\phi(p) = (\phi_1(p), \dots, \phi_\ell(p))$ は S から S への連続関数である。ブラウワーの不動点定理によって, ある $p^* \in S$ が存在して, $\phi(p^*) = p^*$ となる。

$p^* \in S$ であるから, p^* に収束する価格列 $p^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ を $\text{int}S$ 内にとることができる。需要関数 $x(p)$ には $\text{int}S$ 内でワルラス法則が成立するから, 各 ν に応じてある財 h が存在して, $x_h(p^\nu) \leq \sum_{i=1}^m \omega_h^i$ である。このような h は列の番号 ν 毎に異なるが, 財番号は有限である。したがって価格列の部分列を適切にとれば, ある特定の番号を繰り返すと考えることができる。それを h とする。すると, $x_h(p^*) = \tilde{x}_h(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_h^i$ が成立

する。いま, $\beta \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \sum_{k=1}^{\ell} \max(\tilde{x}_k(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0)$ とおけば,

$$\begin{aligned} \beta p_h^* &= p_h^* + \max\left(\tilde{x}_h(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_h^i, 0\right) \\ &= p_h^* \end{aligned} \quad (5.6)$$

が成立する。二つのケース (i) $p_h^* = 0$, (ii) $p_h^* \neq 0$ がある。(i) が成立する場合には, 境界条件によって, 十分大きな ν について, $x_h(p^\nu) \geq K$ である。よって, このとき, (5.6) の右辺は正である。したがって $p_h^* > 0$ となり, これは矛盾である。したがって, (ii) のケースだけを考察すれば良い。このとき, $\beta = 1$ でなければならない。よって, あらゆる k に関して,

$$p_k^* = p_k^* + \max\left(\tilde{x}_k(p^*) - \sum_{i=1}^m \omega_k^i, 0\right)$$

となる。これは, 境界条件よりすべての k について $p_k^* > 0$ であると共に, すべての k について

$$x_k(p^*) = \tilde{x}_k(p^*) \leq \sum_{i=1}^m \omega_k^i$$

を意味する。これと, ワルラス法則によって,

$$x_k(p^*) = \sum_{i=1}^m \omega_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, \ell$$

を意味する。これは競争均衡価格 p^* が存在することを示している。

5.4 粗代替経済

超過需要関数 excess demand function を $z(p) \stackrel{\text{def}}{=} x(p) - \sum_{i=1}^m \omega^i$ と定義する。正のあらゆる価格に関して, 次の条件を満たす時すべての 2 財は強い意味で粗代替財であると言われる。つまり,

$$\forall i \forall j (i \neq j \Rightarrow z_i(p) \text{ は } p_j \text{ に関して厳密な増加関数である})$$

である⁵。

すべての2財が粗代替財になる交換経済の例は、すべての消費者が次のようなコブ・ダグラス型の効用関数を持つ場合である。すなわち、

$$u_h(z^h) = \prod (z_i^h + \omega_i^h)^{\alpha_i^h}, \alpha_i^h > 0, \text{ for all } i \text{ and } h,$$

ここで、 $z_i^h, \omega_i^h (> 0)$ はそれぞれ純需要 net demand と初期保有を表わしている。交換経済においては、純需要と超過需要は一致する。需要関数は

$$z_i + \omega_i^h = \frac{\alpha_i^h \sum_{j=1}^n p_j \omega_j^h}{p_i \sum_{j=1}^n \alpha_j^h}.$$

として得られ、この需要関数ではあらゆる2財が粗代替であることを示すのは易しい。

5.4.1 均衡の一意性

粗代替経済で、競争均衡が一意であることを示しておこう⁶。超過需要関数が価格に関してゼロ次同次であるため、 p^* が均衡価格なら、任意の $\lambda > 0$ について λp^* も均衡価格である。ここでいう一意性は価格を単体 S に限った場合である。いま、 p^* を均衡価格であるとする。 q を p^* でない任意の他の価格とする。ただし、すべての $\mu > 0$ に対して、 $q \neq \mu p^*$ である。ここで、正の数 λ を

$$\lambda \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\mu \in \mathbb{R}_+ \mid \mu q \geq p^*\}.$$

を満たすものときめる。次の関係

$$\lambda = \max \left\{ \frac{p_1^*}{q_1}, \frac{p_2^*}{q_2}, \dots, \frac{p_n^*}{q_n} \right\}.$$

⁵ここでは粗代替性を超過需要関数によって定義しているが、 $\sum_{i=1}^m \omega_i^i$ が一定値であるため、需要関数による定義と一致する。

⁶ここでの説明は Morishima, M. (1960) "On the Three Hicksian Laws of Comparative Statics," *Review of Economic Studies*, pp.195-201, に基づいている。

の成立を見るのは易しい。したがって、 $\lambda q \geq p^*$ and $\lambda q \neq p$ かつ、ある i について $\lambda q_i = p_i$ が成立する。よって、粗代替性によって

$$z_i(q) = z_i(\lambda q) > z_i(p^*) = 0$$

である。このようにして q は均衡価格でないことが示された。

5.4.2 安定性

粗代替経済における動学的安定性 dynamic stability について説明をする。動学的安定性は次の微分方程式で考察される。すなわち

$$\begin{aligned} \dot{p}_j &= z_j(p) \quad \text{when } p_j > 0 \\ &= 0 \quad \text{otherwise,} \end{aligned} \tag{5.7}$$

である。ここで、 $\dot{p}_j \stackrel{\text{def}}{=} dp_j/dt$ であり、 $z_j(p)$ は第 j 財の超過需要関数である。この微分方程式は、需要が供給を超過すれば価格が上昇し、逆の場合には下落することを描いている。式 (5.7) が真の意味で動学的であるか、言い換えると、ここで書かれている t が 2003 年 7 月、2003 年 8 月といった暦上の時点を動いて行くか、には疑問はある。どの時点 t においても超過需要関数が同一である、という (5.7) の特徴は実際の時点は動いているわけではないことを意味している。したがって、この微分方程式は需給がバランスするまでセリが継続する競売買における「呼値の変動」を表現しているのである。

ここでは簡単化のために (5.7) を $\dot{p} = z(p)$ の形で考察する。均衡解は一意に存在することはすでに知られている。ここで、財の量的な単位を変更して均衡価格 p^* において $p_i^* = 1$, for all $i = 1, \dots, n$ を満たすようにできる。微分方程式の解は $p(t)$ 集合 $\{p \in \mathbb{R}_+^n \mid \|p\|^2 = n\}$ 内の部分集合である。実際、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \|p\|^2 &= 2p\dot{p} \\ &= 2pz(p) = 0. \end{aligned}$$

であるからである。微分方程式 (5.7) の大域的安定性を示すには、適当なリャプーノフ関数 Lyapounov function を構築しなければならない⁷。

次の関数

$$\begin{aligned} V(t) &\stackrel{\text{def}}{=} p_j - p_k, \\ p_j &\stackrel{\text{def}}{=} \max_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} p_i, \\ p_k &\stackrel{\text{def}}{=} \min_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} p_i. \end{aligned}$$

を定義する。均衡解の一意性で用いた議論を利用すると、

$$0 = z_j(p^*) > z_j(p), \quad 0 = z_k(p^*) < z_k(p) \quad \text{if } p^* \neq p$$

である。よって、

$$\dot{p}_j < 0 \text{ and } \dot{p}_k > 0 \implies \dot{V} < 0$$

をえる。V をリャプーノフ関数と見れば、数学付録 1 の定理 4.3 (Lyapounov's Theorem) より安定性は成立する⁸。

5.5 数学付録 1: Lyapounov's Theorem

Let us consider the differential equation of the form:

$$\dot{x} = F(x), \tag{5.8}$$

where $F(\cdot)$ is an n -dimensional vector valued function which is continuous on $x \in \mathbb{R}^n$ and the initial value $x(0)$ is given. x^* is called an *equilibrium*

⁷ 数学付録 1 を参照せよ。

⁸ 粗代替経済で、いま一つ有力な安定性を示す議論がある。この議論はいわゆる顕示選好の弱公準 weak axiom of the revealed preference を確立して、それを利用するものである。ここで、顕示選好の弱公準とは、すべての 2 財が粗代替財であるとき、

$$0 = p^* z(p^*) < p^* z(p) \quad \text{if } p \neq p^*.$$

が成立することである。Arrow, K.J., H.D.Block, and L.Hurwicz (1959) "On the competitive equilibrium II," *Econometrica*, Vol.27, 82-109. の Lemma 5 を参照せよ。

if it satisfies $F(x^*) = 0$. We denote a solution to (5.8) with the initial value $y \in \mathbb{R}^n$ by $x(t, y), t \in [0, \infty)$.

定理 5.2 (Global Asymptotic Stability) *Let $F(x)$ of (5.8) be continuously differentiable on the whole \mathbb{R}^n space and let $V(\cdot)$ be continuously differentiable real-valued function on \mathbb{R}^n such that $V(x) \geq 0, \dot{V}(x) \leq 0$ for $x \in \mathbb{R}^n$ and $V(x) \rightarrow \infty$ as $|x| \rightarrow \infty$. Then all solutions of $\dot{x} = F(x)$ exist on $[0, \infty)$ and bounded, and if there exists a unique point x_0 such that $\dot{V}(x_0) = 0$, this x_0 is globally asymptotically stable.*[Brock and Malliaris(1989, Theorem 4.2, page 116)]

Note that

$$\dot{V}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_j} F_j(x).$$

We do not prove the above theorem.⁹ We prove here more simple theorem. We assume that :

仮定 5.1 *The solution $x(t, x(0)), t \in [0, \infty)$ exists and is unique and continuous with respect to the choice of initial value $x(0)$ as well as t .*

定義 5.1 *A function $V : \mathbb{R}^n \rightarrow R$ is called a **Lyapounov function** on C ($C \subset \mathbb{R}^n$) if*

- (a) *V is continuous in \mathbb{R}^n ,*
- (b) *$\forall x(0) \in C, V(x(t, x(0)))$ converges,*
- (c) *if $\{V(x(0))\} = \{V(x(t, x(0))) \mid t \in [0, \infty)\}$ then $x(0)$ is an equilibrium.*

Here we shall prove Lyapounov's Theorem which is stated as follows:

定理 5.3 (Lyapounov's Theorem) *Let x^* be an equilibrium of $F(x)$. Let $x(t, x(0))$ be a solution to (5.8). Suppose there exists a compact set C in \mathbb{R}^n such that*

⁹This theorem is taken from Brock and Malliaris *Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics*, (1989, North-Holland, Amsterdam).

(i) $\{x(t, x(0)) \mid t \in [0, \infty)\} \subset C$, for all $x(0) \in C$.

Suppose that there exists a function $V(x)$ satisfying

(ii) $V(x) \geq 0$ for any $x \in C$ and $V(x) = 0$ iff $x = x^*$,

(iii) $\dot{V}(x) < 0$ if $x \neq x^*$

then the function V is a Lyapounov function on the compact set C and the solution to (5.8) is globally stable.¹⁰

Proof The conditions (a), (b) and (c) hold because of the continuity assumption, (ii) and (iii).

Let $x(0)$ be an any point in C . Then we see by (b):

$$\forall x(0) \in C \exists v^* \in \mathbb{R}_+ \lim_{t \rightarrow \infty} V(t, x(0)) = v^*.$$

We can assume $v^* \in V(C)$ since $V(\cdot)$ is continuous. The path $x(t, x(0))$ lies in the compact set C . Then there exist a point x^0 in C and a subsequence satisfying

(#) $(x(t_\nu, x(0)))_{\nu \in \mathbb{N}}$ such that $x(t_\nu, x(0)) \rightarrow x^0$ and $t_\nu \rightarrow \infty$ as $\nu \rightarrow \infty$.

The relation:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t_\nu, x(0)) = x^0 &\implies \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t + t_\nu, x(0)) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t, x(t_\nu, x(0))) \\ &= x(t, \lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t_\nu, x(0))) \\ &= x(t, x^0) \end{aligned}$$

leads us to:

$$\begin{aligned} v^* = \lim_{t \rightarrow \infty} V(x(t, x(0))) &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} V(x(t + t_\nu, x(0))) \\ &= V(\lim_{\nu \rightarrow \infty} x(t + t_\nu, x(0))) \\ &= V(x(t, x^0)), \quad \forall t \in [0, \infty). \end{aligned} \quad (5.9)$$

¹⁰Note that the condition (iii) implies that the point x^* is the unique equilibrium.

This implies that x^0 is an equilibrium by (c). This together with the assumption (iii) and the relation (5.9), leads us to $v^* = 0$. And thus we obtain $x^0 = x^*$.

The above discussion can be applied to every converging subsequence of satisfying (#) in $x(t, x(0)), t \in [0, \infty)$. Then the path $x(t, x(0))$ converges to x^* . ■

5.6 数学付録2：ベルジュの最大値定理

ベルジュの最大値定理 Berge's Maximum Theorem を解説する¹¹。いくぶん難しいが証明を見る機会が少ないと思われるので、のせておく。この数学付録では、ある程度の数学を前提としている。例えば、対応 correspondence におけるある種の連続性概念 u.s.c. や l.s.c. には定義を与えないし、コンパクト集合の性質も解説しないまま用いる。これらは読者の preknowledge とする。この付録は、多少、初心者向けではない。

Maximum theorem. *If ϕ is a continuous numerical function in $X \times Y$ and Γ is a continuous mapping of X into Y such that, for each x , $\Gamma(x) \neq \emptyset$, then the numerical function M defined by $M(x) = \max\{\phi(x, y) \mid y \in \Gamma(x)\}$ is upper semi-continuous in X and the mapping Φ defined by $\Phi(x) = \{y \mid y \in \Gamma(x), \phi(x, y) = M(x)\}$ is a u.s.c. mapping in X into Y .*

ここで、Berge が “numerical function” と言っているのは『実数値関数』という意味であり、“mapping” とは『対応』のことである。また、u.s.c., l.s.c. とはそれぞれ upper semi continuous, lower semi continuous の省略形である。

Theorem 2. *If ϕ is an upper semi-continuous numerical function in $X \times Y$ and Γ is a u.s.c. mapping of X into Y*

¹¹この定理は原著の英訳版：Berge, C. (1963) *Topological Spaces*, Oliber & Boyd. に掲載されている。英訳本は現在、Dover Publishing Inc. から入手可能である。

such that, for each x , $\Gamma(x) \neq \emptyset$, the numerical function M defined by

$$M(x) = \max\{\phi(x, y) \mid y \in \Gamma(x)\}$$

is upper semi-continuous.

[証明]

I. ϕ, Γ が u.s.c. であることを利用して, $M(x)$ が実数値関数として上半連続であることを示す。

0 . 正の数 ε を任意に選ぶ。

1 . $x_0 \in X$ とする。各 $y \in \Gamma(x_0)$ にたいして近傍 $U_y(x_0), V(y)$ が存在して,

$$(x, z) \in U_y(x_0) \times V(y) \Rightarrow \phi(x, z) \leq \phi(x_0, y) + \varepsilon$$

である。このような $V(y), U_y(x_0)$ は各 $y \in \Gamma(x_0)$ についてとることができる。

2 . $\Gamma(x_0)$ はコンパクト集合 (u.s.c. mapping の定義より) であるから, 有限個の近傍 $V(y_1), \dots, V(y_n)$ が存在して $\Gamma(x_0)$ を覆うことができる。

3 . $U'(x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{i=1}^n U_{y_i}(x_0)$ かつ $V(\Gamma(x_0)) = \bigcup_{i=1}^n V(y_i)$ とする。すると, $x \in U'(x_0), y \in V(\Gamma(x_0))$ であれば,

$$\phi(x, y) \leq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \phi(x_0, y_i) + \varepsilon \leq M(x_0) + \varepsilon$$

が成立する。

4 . さらに, 近傍 $U(x_0)$ が存在して,

$$x \in U(x_0) \Rightarrow \Gamma(x) \subset V(\Gamma(x_0))$$

となる (Berge では, これで u.s.c. の定義がなされている)。したがって,

$$x \in U(x_0) \cap U'(x_0) \Rightarrow M(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \phi(x, y) \leq M(x_0) + \varepsilon$$

となる。

II. ϕ, Γ が l.s.c. であることを利用して, $M(x)$ が実数値関数として下半連続であることを示そう。

5. 正の数 ε を任意に選ぶ。

6. $x_0 \in X$ とする。 M の定義によって, ある $y_0 \in \Gamma(x_0)$ が存在して,

$$M(x_0) - \varepsilon < \phi(x_0, y_0)$$

である。

7. $\phi(\cdot)$ は l.s.c. であるから, (x_0, y_0) のある近傍 $U(x_0) \times V(y_0)$ が存在して,

$$(x, y) \in U(x_0) \times V(y_0) \Rightarrow \phi(x, y) \geq \phi(x_0, y_0) - \varepsilon \geq M(x_0) - 2\varepsilon$$

である。

8. $y_0 \in V(y_0) \cap \Gamma(x_0)$ であるから, $V(y_0) \cap \Gamma(x_0) \neq \emptyset$ である。 Γ の l.s.c. 性より, ある近傍 $U'(x_0)$ が存在して

$$x \in U'(x_0) \Rightarrow \Gamma(x) \cap V(y_0) \neq \emptyset$$

である (Berge では, これで l.s.c. の定義がなされている)。したがって, $\tilde{y} \in \Gamma(x) \cap V(y_0)$ とすれば, $x \in U(x_0) \cap U'(x_0)$ である時,

$$M(x) = \max_{y \in \Gamma(x)} \phi(x, y) \geq \phi(x, \tilde{y}) \geq M(x_0) - 2\varepsilon$$

となる。

III. 最終段階

9. 関数 ϕ は $X \times Y$ の上で連続であるから M は連続な関数である。(上の Theorem 2 が lower semi continuous 版で成立する)

10. さらに, 写像 Δ

$$\Delta(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{ y \in Y \mid M(x) - \phi(x, y) \leq 0 \}$$

は閉である。よって, $\Phi = \Gamma \cap \Delta$ は u.s.c. である。■