基礎経済数学 2008年度前期

2008 年度 前期 土曜日 第２限

担当者：入谷純
TA ：高羅ひとみ

神戸大学経済学部大学院

まえがき

2008 年度に大学院科目『基礎経済数学』を担当した。この講義には質問掲示板が準備された。その経緯は，19 年度末のある会議でカナダの新設大学が TA の人材募集に困ったことがあり，遠隔地の他大学の大学院生に Web による TA を依頼して，大成功であった旨の報告を聞いたことに遡る。それで，『経済数学』担当の三谷直樹さんとともに情報担当所今日の白浜さんにお願いをして，数式のかける質問掲示板を準備していただいた。

また，大学院生の高羅ひとみさんに TA をお願いをした。TA のところにも質問やメイルが届けられた。

それらの質問や回答そして連絡事項などが掲示板に載せられたが，それらをまとめたものがこの小冊子である。

2008 年 8 月 5 日
入谷純

目次

第 1 章

質問箱

2008 年前期（土曜，２限）「基礎経済数学」への質問はここにどうぞ。

質問をする方は，Q の後に番号を付けてください。番号はこれまでの質問の続き番号にして下さい。名前を書く必要はありませんが（書いてくださっても，もちろん，結構です），答えやすいように，匿名，ペンネーム等を付けてください。

数式は半角の $ と $ で囲んでください。例えば，＄ｆ（ｘ）＄をすべて半角文字で書きますと，$f(x)$ と見えます。肩にスーパーフィックスを付けるときには，＄ａ＾ｎ＄をすべて半角で書いて，a^n となります。サフィックスにするときは，＄ａ＿ｎ＄をすべて半角で書けば，a_n となります。

体裁とか，形式を気にせず，気楽に質問をタイプしてください。体裁は，こちらで整えます。

ここに書き込むには，上の編集をクリックして，編集画面にしてください。記号の書き方が分からない場合には，このページの他の部分を参考にしてコピーアンドペーストしてください。なお，凍結されている場合には，凍結解除をする必要があります。

1.1　序章 論理

序章についての質問はこの下にどうぞ。

○　**第一回の講義**（4 月 12 日）では「論理」について話します。予習される方は教科書の「第７章 補論」を見てきてください（４月１０日，入谷）。

課題０

TA の高羅です。半年間どうぞよろしくお願いします。授業中にもアナウンスしましたが、来週までに各自取り組んでいただく練習問題はテキスト 215 ページの問題 7.2 の (1) と (2) です。来週解説します。間違っていてもよいので、各自手を動かして考えてみてください。

テキストをもっていない方のために問題を書いておきます。

問題 7.2　命題「任意の正の実数 h に対して、ある自然数 n が存在して、$1/n < h$ である」について次の問に答えなさい。

（１）この命題に形式的な表現を与えなさい（$\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ などを用いて表現しなさい）。
（２）この命題の否定命題を作りなさい。

Q1. 入谷先生、テキストで 2,3 質問があります。よろしくお願いします

- 命題 A が真で B が偽であると仮定して、命題 $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$ が真であることを導くというのは、背理法とはいわないのでしょうか。
- テキスト 213 ページの下のほうの (i-1)$\forall x(x \geq 1)$ で、$\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 1)$ と書いていないのには何か意味があるのですか。
- テキスト 211 ページの上から 7 行目、「しかも A と B が同値であれば、B が真（偽）であることが証明されると、A は推論規則から真（偽）でなければならない。」という箇所を少し説明してください。

A1. 最初から順番に 1， 2， 3 の質問と呼びます（入谷，4 月 16 日，18 日）。
匿名さんの質問 1 これはとても深い疑問です。「命題 A が真で B が偽であると仮定して」というのは，$A \Rightarrow B$ を証明しようとしていて，その結果を否定したということですね。この質問の背後には，つぎのような推論の連鎖があるのでしょう。a：$\neg B \Rightarrow \neg A$ が T であるとき，b：$A \Rightarrow B$ が F であったと仮定する（背理法の仮定)。このとき，b より，A は T，B は F となります。このとき，$\neg B \Rightarrow \neg A$ は F である。これは a と矛盾している。したがって，b を仮定することができない。以上のようなロジックの流れでは，確かに背理法をつかっています。しかし，b の仮定をする必要がないとしたら，背理法ではありません。実際に，a が示されているということと，そして，$\neg B \Rightarrow \neg A$ と $A \Rightarrow B$ は同値（真理表を作ると同じ真理値の並び）であることから，$A \Rightarrow B$ の証明が終わります。ここには，「背理法の仮定」はありませんね。
匿名さんの質問 2 済みません，これから会議に出ます。のこりは今日明日中にお答えします。213 から 214 ページの (i'), (i-1), (i-2), (i-3) のどれもが同じ内容でつかわれることが多いのです。このようにいくつも書いているのは，省略されて表現された式を見たときにとまどわないためです。$\forall x(x \geq 1)$ と $\forall x \in \mathbb{R}(x \geq 1)$ はともに (i-3) と書くのが最も丁寧です。
匿名さんの質問 3 いま，A と B は同値であるとします。そして，B が真であることが示されたとしましょう。$B \Rightarrow A$ は真ですから，推論規則から A は真でなければなりません。次に，B が偽であることが判っているとします。$A \Rightarrow B$ は真ですから，その対偶 $\neg B \Rightarrow \neg A$ は真です。よってやはり推論規則から，$\neg A$ は真です。つまり，A は偽だということになります。以上をまとめて書くと質問文にあるような表現になります。

Q1.1 入谷先生、コメントありがとうございます。
質問 1 について、私は $A \Rightarrow B$ が真であることを証明するときに、

命題 A が真で B が偽であると仮定する。このとき、$\neg A$ でないことを示す。これは A が真に矛盾する。したがって、B は真でなければならないというやり方をよく使います。これは対偶でもなければ、背理法でもないおかしな証明をしている（証明になっていない）のでしょうか（4 月 19 日）。

A1.1 結論から言うと，おかしくありません。背理法になっており，正しい手続きです（４月１９日，入谷)。

ただし，仰っている「命題 A が真で B が偽であると仮定し、$\neg A$ でないことを示す」ということの後半部分は，$\neg B \Rightarrow \neg A$ を示すということですね。$\neg B \Rightarrow \neg A$ は $A \Rightarrow B$ と同値なので，ここだけで証明が終わっています。つまり，B が偽であるという仮定（背理法の仮定）は必要ないことになっています。

違った風に表現してみます。ある定理を証明するときに，(i) その定理が成り立たないと仮定して出発して，(ii) その定理が成り立つことを示して（あなたの作業では，当該の定理と同値の定理を証明して)，従って (iii) 矛盾である。だから (iv) その定理が成立する。以上のようですね。よく見ると，(ii) だけで証明は終わっていませんか？

1.2　第 1 章 実数，収束，そして連続

第 1 章への質問はこの下にどうぞ

○　**第二回の講義**（4 月 19 日）では「実数と収束」について話します。予習される方は教科書の「第 1 章 実数と関数」の第 1 節と第 2 節を見てきてください。

この章でつかう記号は「列 $a_n, n = 1, 2, \ldots$ について $n \to \infty$ のとき $a_n \to a$ が成立する」などです。1 行をつかって数式（別行立ての数式）を書くときは，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

のようにします（４月１５日，入谷)。

課題 1.1.1
TA の高羅です。次回（４月２６日）　までの課題は以下の通りです。問題番号の後ろにある括弧内のページ番号は、テキストのページ番号を示しています。この問題の意図は、収束の問題などを考えるときに絶対値の計算が必要になるためです（４月１９日、高羅）。

問題 1.1.1（p.4：絶対値）　以下を示しなさい。

（１）任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ について、$-|a| \leq a \leq |a|$ が成立する。
（２）任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ と任意の実数 $k \in \mathbb{R}$ について、$|a| \leq k$ であるとする。このとき、$-k \leq a \leq k$ が成立する。
（３）任意の実数 $a \in \mathbb{R}$ と任意の実数 $k \in \mathbb{R}$ について、$-k \leq a \leq k$ であるとする。このとき、$|a| \leq k$ が成立する。
（４）任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について、$|a+b| \leq |a|+|b|$ が成立する。
（５）任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について、$|a|-|b| \leq |a+b|$ が成立する。
（６）任意の実数 $a, b \in \mathbb{R}$ について、$||a|-|b|| \leq |a-b| \leq |a|+|b|$ が成立する。

○**第三回の講義**（4 月 26 日）では「収束の諸性質，連続性」について話します。予習される方は教科書の「第１章 実数と関数」の第２節と第３節を見てきてください（4 月 23 日，入谷）。

課題 1.2.1 TA の高羅です。次回（５月１０日）までの課題は以下の通りです。この問題の意図は、収束の定義を理解しているか確認することです。どれも基本的な問題です。収束の定義（p.5 の (1.4)）に立ち戻って、取り組んでみて下さい。実数列の収束の証明方法に慣れるには以下の課題の他に、テキスト１２ページの問題１．２に取り組んだり、定理１．１の証明を自分でやってみるとよいでしょう（４月２６日、高羅）。

問題 1.2.1（p.4-5：実数列の収束、実数列の有界性）　以下を示しなさい。

（１）$c \in \mathbb{R}$ を定数とする。実数列 $a_n \overset{\mathrm{def}}{=} c, n = 1, 2, \cdots$ について、この数列の極限を求め、なぜそれが極限であるのか説明しなさい。
（２）$a_n, n = 1, 2, \cdots$ を実数列とし、実数 c に収束するとする。このとき、任意の $n = 1, 2, \cdots$ について、$a_n \geq c$ が成立するならば、

$a \geq c$ であることを確認しなさい。
（3）実数列が収束するとすると、その極限は一意であることを確認しなさい（ヒント：背理法を用いる）。
（4）収束する実数列は有界であることを確認しなさい（有界な数列の定義は p.5 にあります）。

問題 1.1.2（2）の訂正　TA の高羅です。受講生の方からメールをいただきました。上の問題 1.1.2 の (2) は正しくは、

（2）$a_n, n = 1, 2, \cdots$ を実数列とし、実数 a に収束するとする。このとき、任意の $n = 1, 2, \cdots$ について、$a_n \geq c$ が成立するならば、$a \geq c$ であることを確認しなさい。

です。私の入力ミスです。すみません。指摘してくれた受講生の方どうもありがとう。

Q2. 教科書 p.9 の定理 1.1 の証明について（とある受講生）
授業の証明では、max,min などを利用して説明されてましたが、今までこの定理を証明するのに max,min を使った経験がないので、その必要性がわからないんですが説明していただけないでしょうか。
A2. 授業での定理 1.1 で与えた証明で説明します（5 月 2 日，入谷）。
とある受講生さん，ご質問有り難うございます。この点は，おそらく皆さんが悩んでおられるところだと思います。
授業では列 $b_n \neq 0, n = 1, 2, \ldots$ が $n \to \infty$ のとき $b_n \to b(\neq 0)$ を満たすとき，$1/b_n \to 1/b$ as $(n \to \infty)$ を証明しました。目標は，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$$

を示すことです。これには，

$$\forall h > 0\ \exists \bar{n}\ (n \geq \bar{n} \Rightarrow |1/b_n - 1/b| < h)$$

を示せばよいわけです。使える材料は，$\lim_{n\to\infty} b_n = b$ です。 最

初の「任意の $h>0$」の方は $|1/b_n-1/b|<h$ のために取っておかないといけませんので，h から特別の $h'>0$ を作ります。そのときに，$|b_n-b|<h'$ の成立が，ちょうど $|1/b_n-1/b|<h$ をもたらすように h' を探したのです。そのときに，min とか max を用いたというわけです。

上の「意図」を飲み込んでいただいて（ゲップが出るかも知れませんが，我慢なさって），もう一度証明を見直してみてください。証明をノートを見ずに自力で再現できれば，十分理解なさった証拠です。

Q2.1 入谷先生、コメントありがとうございます。

先生のコメント意識して、をもう一度ノートに書いた証明を見直してみます。コメントありがとうございます。(5 月 3 日)

Q3. 宿題について（匿名）

第 3 回の講義（4 月 26 日）での宿題の解説が（6）のみでしたが、(1）～（5）についても解説をしていただけないでしょうか。

A3. 1 章の練習問題が終わったところで、解答を配布する予定でいます（5 月 2 日、高羅)。

匿名さん，ご質問有り難うございます。５月２４日の授業終了時に配布予定です。それより早く欲しい方、あるいは仕事で２４日授業に出席できない方は、私宛にメールをいただければ pdf ファイルをお送りします。解答をみてよくわからないところがあれば遠慮なく申し出でださい。解説します。

Q4. 入谷先生、2,3 質問がございます。よろしくお願いします（匿名)。

• テキスト１１ページに定理 1.1 の（１）を利用した例があります。それは、

$$a_k=0, k=1,2,\cdots$$

$$b_1=1, b_2=1, b_3=1, b_{j^2}=1/j, \cdots, j=2,3,\cdots$$

と $a_k, b_k, k = 1, 2, \cdots$ を定義する。$j^2 \leq k$ なる k に対して、

$$0 = a_k \leq c_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \leq \frac{1}{\sqrt{j^2}} = \frac{1}{j} = b_k$$

である。また $k \geq j^2$ のときは $b_k = 1/j$ であるから列 $b_k, k = 1, 2, \cdots$ は（1．1）よりゼロに収束する（以下略)。という理解でよいのでしょうか。

● 二項関係と、関数（あるいは対応）との間にはどのような関係があるのですか。

● 次回の課題 1.1.2 の（2）に関連して。

$a_n, n = 1, 2, \cdots$ を実数列とし、実数 a に収束するとする。このとき、任意の $n = 1, 2, \cdots$ について、$a_n > c$ が成立するならば、$a \geq c$ であることを示す場合の証明方法として、課題 1.1.2 の (2) の証明方法と同様の証明方法しか思い浮かびません。別の証明方法があれば教えて下さい。

A4. **匿名さん**，質問有り難うございます。上から質問 1，2，3 として順にお答えします（5 月 2 日，入谷)。

質問 1 そのとおりです。特に，j と k の間に，$j^2 \leq k \leq (j+1)^2 - 1$ の関係を要請すると $k \to \infty$ のとき $j \to \infty$ になり，この j, k について $b_k = 1/j$ であるから $b_k \to 0$ となり，最後は「挟み撃ち」のストーリーです。

質問 2 集合 X 上の 2 項関係 R とは，$R \subset X \times X$ であることです。一方，関数や対応が，X を定義域とし，Y を値域とするときには，関数や対応は必ずしも二項関係ではありません。Y が X と同一でないかもしれないからです。しかし，関数や対応が X を定義域とし，同時に X を値域とするときには，X 上の二項関係の特定のものとなっています。つまり，関数 $f : X \to X$ であるなら，$f \subset X \times X$ と見てもよいわけです。これは関数を縦軸と横軸で作られる平面のグラフであると考えることと同じです。

質問 3 質問を拝見すると，上の課題 1.2.1 の (2) のことですね。課題の方では $a_n \geq c$ が，あなたの疑問のほうには，$a_n > c$ が全て

の $n = 1, 2, \ldots$ に要求されています。ご覧になって，最初の要請の方が広くて第 2 の要請を含んでいますことが分かりますか。つまり，あなたが質問されている問題は，課題 1.2.1 の (2) の部分なのです。だから，「1.2.1 (2) の解法しか思い浮かばない」というのは極めて自然です。

Q4.1 入谷先生、コメントありがとうございます。

質問 1 について、私のそもそもの疑問はどうして証明のなかでわざわざ $(j+1)^2 - 1$ 項を明記しているのかなのですが、j と k の間に，$j^2 \leq k$ の関係ではなく、$j^2 \leq k \leq (j+1)^2 - 1$ の関係を要請することがこの証明の key なのでしょうか。質問 2 と質問 3 はもやもやが晴れてすっきりしました。ありがとうございます。(5 月 3 日)

A4.1 **匿名さん**，明記した方がよいでしょうね。その方が，わかりやすくなります (5 月 3 日，入谷)。

つまり，「$j^2 \leq k \leq (j+1)^2 - 1$ を満たす k について，$b_k = 1/j, j = 1, 2, \ldots$」と書く方が，

$j^2 \leq k$ を満たす k について，$b_k = 1/j, j = 1, 2, \ldots$

と書くことよりも，明瞭に伝わるからです。例えば，第 2 の書き方では，$k = 5$ の場合には，$1^2 < k$ と $2^2 < k$ の両方が成立して，b_k として $1/1$ にすべきか，$1/2$ にすべきかが分からなくなります。

Q4.2 入谷先生、コメントありがとうございます。

さっきふと気づいたのですが、実数列 b_k は

$$
\begin{aligned}
b_1 = 1,\ b_2 = 1,\ b_3 = 1,\ b_4 = \frac{1}{2},\ \cdots, \\
b_8 = \frac{1}{2},\ b_9 = \frac{1}{3},\ \cdots, \\
b_{15} = \frac{1}{3},\ b_{16} = \frac{1}{4},\ \cdots
\end{aligned}
$$

のような列ですね。ずっと頭のなかで $b_1 = 1$, $b_2 = 1$, $b_3 = 1$, $b_{j^2} = 1/j$, $\cdots$, $b_{(j+1)^2-1} = 1/j$, $\cdots$ を考えていました。そう考えるとこの間の質問は恥ずかしい質問ですが、丁寧にコメントくださってありがとうございます。おかげで理解が深まりました。(5 月 8 日)

A4.2 どういたしまして。気にせず，遠慮なくご質問下さい（5 月 9 日，入谷）。

課題 1.3.1 と 1.3.2　TA の高羅です。少し早いですが、５月１７日までの課題を掲示します。今回は前回の授業で習った「関数の連続性」に関する問題です。ゴールデンウイークをはさみます。前回習った連続性の定義を忘れないためにも、時間のある人は手を動かしてみるとよいでしょう。問題 1.3.1 の意図は関数が連続であることを定義から確認すること、問題 1.3.2 の意図は少し複雑な関数でも連続性を確認できることです（５月２日、高羅）。

問題 1.3.1（p.19：関数の連続性）　$x \in \mathbb{R}$ とする。以下の実数値関数 f が連続関数であることを確認しなさい。

（1） $f(x) = x$
（2） $f(x) = c$　ただし c は定数
（3） $f(x) = x^2 + 5x - 3$
（4） $f(x) = |x|$
（5） $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$

問題 1.3.2（p.19：関数の連続性）

（1）関数 f を $x \neq 0$ であれば $f(x) = \frac{1}{x}$、$x = 0$ であれば $f(x) = 0$ と定義する。このとき、関数 f が原点で連続でないことを確認しなさい。

（2）関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $\mathbb{R}$ を定義域とし $\mathbb{R}$ を値域とする連続関数とする。関数 $\psi(x)$ を

$$\psi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

とするとき、$\psi(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であることを確認しなさい。

○　**第四回の講義**（5 月 10 日）では「いろいろな連続関数，微分可能性」について話します。予習される方は教科書の「第 1 章 実数と関数」の第 3 節と第 4 節を見てきてください（5 月 6 日，入谷）。

Q5. 教科書 p.24 の脚注 7）について（匿名）
指数関数 $f : x \to a^x$ で $a < 0$ の場合どのように議論は展開されるのでしょうか。

A5. **匿名さん**，これからの知識を多少必要としますが，概略を以下に書きます（5 月 8 日，入谷)。
まず最初に，経済学ではほとんどの場合，$a > 0$ で議論をすると思ってください。また，$a > 0$ の場合，任意の実数 x について，a^x は正の実数であることは既知であるとします。
$a < 0$ の場合は次のようです。

$$a = |a|(-1) = |a|(\cos\pi + i\sin\pi) = |a|e^{i\pi}$$

はよろしいでしょうか。もちろん，$i = (-1)^{1/2}$ です。最後の等号はオイラーが発見した有名な式です。すると，

$$a^x = |a|^x(-1)^x = |a|^x(\cos\pi + i\sin\pi)^x = |a|^x(\cos\pi x + i\sin\pi x) = |a|^x e^{i\pi x}$$

となります。$|a|^x$ については知られているわけですから，右辺は定義されています。ここで，$-1 = \cos(2n+1)\pi + i\sin(2n+1)\pi$, $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$ でもあることに注意をすると，a^x の値は上だけではなく，

$$a^x = |a|^x(\cos(2n+1)\pi x + i\sin(2n+1)\pi x) = |a|^x e^{i(2n+1)\pi x},\quad n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$$

であり，無数の値を持ちます。したがって a^x はもはや関数ではなくなるわけです。
これに似た状況は，教科書の 75 ページにも解説されています。

Q6. 入谷先生、以下 Q6-9 の 4 つ質問があります。よろしくお願いします。三角関数の連続性について（匿名）
• 三角関数が幾何学的に定義される場合、連続性は容易に示せますが、三角関数を解析的に定義する場合、三角関数の連続性はどのように証明されるのでしょうか。概略を教えてください。

A6. たくさんの質問が並んでいて，驚きました（5 月 11 日，入谷)。
幾何学的に定義される三角関数の連続性は必ずしも正確だと言えないかも知れませんが，たしかに，$\sin x$ の連続性は，幾何学的に**解説**することのほうが，解析的に示すよりも容易だ思います。僕も三角関数の微分可能性では，幾何学的な解説によって説明します。この解説は三角関数の微分まで（多分，次回か次々回の講義）待ってください。
解析的に定義される三角関数は次です。

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

級数としての定義となっているわけです。連続性を示すにはこれを用います。これは，教科書の 55 ページにあります。興味があれば，これを利用して証明をしてみて下さい。レポートを出してくだされば，喜んで，拝見します。
Q7. 指数関数の連続性について（匿名）
指数関数の連続性を証明の概略を教えていただけないでしょうか。宜しくお願いします。
A7. 匿名さん，書くと長いので，本当に概略だけにさせて下さい（5 月 11 日，入谷)。
講義中にも申し上げましたが，a^x の値は，x が有理数の時には分かっているとしましょう。x が無理数の時に，x に収束する有理数の列 $q_n, n = 1, 2, \dots$ について，$a^{q_n}, n = 1, 2, \dots$ の極限として，a^x を定義します。このような有理数の列が存在することは，「有理数の稠密性」から分かります。そして，x に収束する他の有理数の列 $p_n, n = 1, 2, \dots$ についても列 a^{p_n}，$n = 1, 2, \dots$ が以前と同じ極限を持つことを示すのが第一段階です。これは，定義が上手くできているかどうかのチェックです。これには，多くのテクニックが必要です。例えば，$f(x) = a^x$ が x が有理数であれば単調である

こと，$a>0$ の時には，列 $a^{1/n}, n=1,2,\ldots$ が 1 に収束することなどを用います。次に，任意の x を選んで，x に収束する任意の実数列 $x_n, n=1,2,\ldots$ について，a^{x_n} が a^x に収束することを示します。これが最終段階です。

Q7.1 入谷先生、コメントありがとうございます。列 $a^{1/n}, n=1,2,\ldots$ が 1 に収束することの証明について。
入谷純・久我清（1999)『数理経済学入門』有斐閣（p.129) に、「有理数の稠密性から、自然数 k,t が存在して、

$$b-1>\frac{1}{k}>0,\ a<1+\frac{t}{k}$$

である。よって、二項定理を勘案すると、

$$a\geq b^t>(1+\frac{1}{k})^t\geq 1+\frac{t}{k}>a$$

となる。これは矛盾である。」とあります。$a<1+\frac{t}{k}$ と $a\geq b^t$ がどうして成立するのかいまいち分かりません。少し説明をしていただけないでしょうか。（５月１３日）

A7.1 質問なさるときは，これを読む他の人のために記号の定義を書きましょうね（5 月 13 日，入谷)。
上の質問へのお答えは，基礎経済数学の講義での内容よりも多少とも難しいものになります。読者は，そのつもりで読んで下さい。
質問に前提になっている状況を説明することから始めます。最初に，$a>1$ という定数 a について，「**実数列** $a^{1/n}$**,** $n=1,2,\ldots$ **が１に収束する**」ことを示すという目標があります。このとき，
（ア）a^x は，x を有理数に限ると，単調増加的であるということがわかっているとします。そして，b は

$$b=\lim_{n\to\infty}a^{1/n}$$

と定義されて，

$$b>1$$

と仮定されています（これは**背理法の仮定**です)。極限 b があるというのは既に判っています。以上が質問なさっている方の出発点です。以上のような説明を書いてくだされば，僕も本を参照せずに回答できるので，これからは質問には状況説明をお願いしますね。

列 $a^{1/n}, n = 1, 2, \ldots$ に極限があるということに**匿名さん**は納得なさっていますか？

質問にある「ある自然数 k が存在して，$b-1 > 1/k > 0$」というのは，有理数の稠密性ですね。また，この k に対して，「$(a-1)k < t$ つまり，$a < 1 + t/k$ となる自然数 t がある」のは，アルキメデスというか，自然数の上方非有界性です。

そこで，$b = \lim_{n\to\infty} a^{1/n}$ であり（極限がある)，かつ，$a^{1/n}$ が n について減少的になっているという確認は（ア）よりできますね，宜しいですか。すると，$b^t = \lim_{n\to\infty}(a^{1/n})^t$ であるのは，講義で紹介した定理 1.1 の (iv) より得られます。$n > t$ であれば，（ア）より $a > a^{t/n}$ ですから，$n \to \infty$ を図ると，$a \geq b^t$ が得られます。これで宜しいですか？

最後の不等式，$(1 + 1/k)^t \geq 1 + t/k$ は了解なさっていますか？

Q7.1-1 入谷先生、コメントありがとうございます。

入谷先生、丁寧に解説してくださって、ありがとうございます。おかげでクリアになりました。定義の書き忘れには以後注意します (5 月 14 日，　匿名)。

Q7.2-1 最終段階の証明について。

任意の x を選んで，x に収束する任意の実数列 $x_n, n = 1, 2, \ldots$ について，a^{x_n} が a^x に収束することの証明の概略を教えていただけないでしょうか。よろしくお願いします。（5 月１３日）

A7.2-1 あなたの質問をもう少し説明してください（5 月 13 日，入谷)。

Q7.2-2 入谷先生、コメントありがとうございます。

指数関数の連続性の証明の概略は先生がして下さったコメントの A7 でよくわかりました。入谷・久我『数理経済学入門』のなかで

証明がされていたことを思い出し実際見てみました。すると、コメント A7 の「第一段階」部分のなかでよく分からない部分がありました。それが Q7.1 です。また、A7 の「最終段階」部分は『数理経済学入門』の定理 5.12(p.130) にあたります。しかし、その証明は私のなかでいまいちクリアになりません。過去の講義ノートをふりかえってみても、指数関数の連続性は講義されておらず、少し解説をしていただけないかというのが Q7.2-1 です。宜しくお願いします（5 月 14 日）。

A7.2-2. **匿名さん**，過去の講義ノートまで調べて頂いているのですか，有り難う（5 月 14 日，入谷）。

きっと，あなたは久我先生と僕の本の「指数関数の連続性」を証明する最終段階のある箇所で判らなくなっているのですね。僕がお聞きしたいのは，それがどこであるか，どの点が納得いかないかということです。それを教えていただいた方が，スムーズに議論が進むと思います。Q7.1 ではそれが判ったので，お答えしやすかったのです。今回も Q7.1 のように具体的な内容を示して下さい。

僕は過去の講義ノートを持っていないので，すみませんが，コピーをさせて下さい。いつでも結構です。

Q7.2-3 入谷先生、コメントありがとうございます。

入谷・久我の証明 (定理 5.12, p.130) で、「r を任意の実数とし、(r_μ) を r に収束する任意の実数列とするとき、**各 μ に対して有理数の列** r_{μ_k}，$k \in \{1, 2, \cdots\}$，$r_{\mu_k} \to r_\mu$，(as $k \to \infty$) **を** $|r_{\mu_k} - r_\mu| < 1/k$ **を満たすようにとっておく**ことができる。これらから得られる列 r_{μ_μ}，$\mu \in \{1, 2, \cdots\}$ は r に収束する列である。ここで、

$$|f(r) - f(r_\mu)| \leq |f(r) - f(r_{\mu_\mu})| + |f(r_{\mu_\mu}) - f(r_\mu)|$$

を勘案すると」までは分かるのですが、次に「右辺第一項はゼロに収束する」とあります。なんとなくは分かりますが、ここの部分がクリアになりません。少し解説していただけないでしょうか。宜しくお願いします（5 月 15 日）。

A7.2-3. 列 r_{μ_μ}，$\mu = 1, 2, \ldots$ が r に収束するからです（5 月 16

日，入谷)。

1．$f(x)=a^x$ という関数は，x が有理数でない場合には，x に収束する有理数の列 $q_n, n=1,2,\ldots$ をとってきて，a^{q_n}，$n=1,2,\ldots$ の極限として定義しました。

2．そして，x に収束するどのような有理数の列についても極限は同じであることが知られているわけです。

3．列 r_{μ_μ}，$\mu=1,2,\ldots$ は有理数の列です。$|f(r)-f(r_{\mu_\mu})|, \mu=1,2,\ldots$ がゼロに収束するには，r_{μ_μ}，$\mu=1,2,\ldots$ が r に収束することを示せばよいということですね。そこで，

$$|r-r_{\mu_\mu}| \leq |r-r_\mu| + |r_\mu - r_{\mu_\mu}|$$

をみると，右辺の第一項は，定義により，$\mu \to \infty$ のときゼロに収束します。第二項は $|r_\mu - r_{\mu_\mu}| \leq 1/\mu$ となるように列が取られていますから（あなたの質問に青をつけた部分を見てください)，$\mu \to \infty$ のとき，やはりゼロに収束します。これから，列 r_{μ_μ}，$\mu=1,2,\ldots$ が r に収束することになります。

Q7.2-4 入谷先生コメントありがとうございます。

A7.2-3 の 1 に関して、少しひっかかる点があります。入谷・久我 (p.129) では $f(x)=a^x$ という関数は，x が有理数でない場合には，x に収束する**単調増加な**有理数の列 q_n，$n=1,2,\ldots$ をとってきて，a^{q_n}，$n=1,2,\ldots$ の極限として定義しています。列 r_{μ_μ}，$\mu \in \{1,2,\cdots\}$ が単調増加列でない場合はどう考えたらよいのでしょうか。Q7.2-3 で、クリアになりませんと申し上げたのは実はここにありました (5 月 16 日)。

A7.2-4 列 r_{μ_μ}，$\mu \in \{1,2,\cdots\}$ はかならずしも単調増加列ではありません（5 月 16 日，入谷)。

単調性があると，有界性を示すだけで極限の存在が言えますから，**A7.2-3** の最初の段階 1 では，単調なものを選んでおくと便利です。一度極限があることが判れば，”A7.2-3” の 2 より任意の有理数列に対して，同じ極限に近づくことがわかっています。ですから，r_{μ_μ}，$\mu=1,2,\ldots$ は r に収束する有理数の列であれば十分だ

ということになります。

Q7.2-5 入谷先生コメントありがとうございます。

なるほど。やっと指数関数の連続性の証明がクリアになりました。議論をしていただいた入谷先生には感謝します。ありがとうございました（5 月 17 日）。

Q8. 中間値定理について（匿名）

昨日の授業でワイエルシュトラスの定理、有理数の稠密性、中間値定理について習いました。最初の 2 つについては経済学における有用性がテキストに書かれています。中間値定理の経済学における有用性について教えてください。

A8. **匿名さん**，シンプルな経済，例えば，2 財経済の均衡の存在証明をするときには，中間値の定理を用いるのが便利です（5 月 11 日，入谷）。

Q9. p.1 について（匿名）

p.1 に「実数は既知とする。」とあります。背後にどのような議論があるのでしょうか。

A9. **匿名さん**，背後にはとても深遠な議論があります（5 月 11 日,12 日，入谷）。

数学の中には，実数を与えられたものとして出発せずに，より基礎的なものから実数自体を構築できる分野（数学基礎論や集合論）があります。用いている教科書が（この講義も）そのような数学にまで遡らないで，「実数自体はすでに既知のものとして存在している」との前提で書かれている（なされる）ということです。

数理経済学では，数学基礎論とか集合論で得られる定理（例えば，Zorn’s lemma（ツオルンの補題）や Szpilrajn theorem（スピルレアンの定理））を使いますが，他の経済学の分野ではほとんど使わないでしょう。経済学で，圧倒的によく用いられる有用な数学の用具は解析学，特に微分，です。ですから，この講義では，実数を構築してみせる数学にそんなに重点を置く必要はないというか，あまり難しいことに入り込まないのが賢明である，という判断をしてい

るわけです。

興味がある方は，A. Abian (1965) *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, Saunders を見てください。実数を構築すれば，教科書で実数の性質として仮定した内容（たとえば，「切断」や「非空で有界な実数の集合には上限がある」等の内容）が，本格的に証明されます。これはとても面白い点です。数学基礎論には，P.R. Halmos (1970) *Naive Set Theory*, Springer あるいは，R.L. Wilder (1960) *Introduction to the Foundation of Mathematics*, John Wiley & Sons（ワイルダー著吉田洋一訳 (1969)『数学基礎論序説』培風館）という極めて上質な入門書があります。

Q10. 三角関数について（Rokko）
前回の授業で、指数関数と対数関数、三角関数が出てきました。経済学をやっていて三角関数の性質を知っていて役に立ったという経験はこれまでのところありません。三角関数の性質を知っておいて経済学で何か役に立つことはありますか（5 月 17 日)。
A10. 微分方程式を用いる分野で利用します（5 月 17 日，入谷)。
Rokko さん，初めてのご質問ですね。成長論などでは，時点から時点に経済が変動していく（動学的，dynamic）状態を微分方程式を用いて表現します。一つの常微分方程式に，特性方程式という高次方程式が付随します。特性方程式の解が複素数であれば，微分方程式の解に sin や cos が出てきて，循環する状態を表現します。微分方程式に加えて，定差方程式でも同様のことが起こります。微分方程式は取り扱いが容易です。定差方程式の方が経済学的に解釈するのが容易です。

1.3　第 2 章 一変数関数の微分

第 2 章への質問はこの下にどうぞ。

○**第五回の講義**（5 月 17 日）には新しい章に入って「一変数の微分」に

ついて話します。予習される方は教科書の第１章４節と第２章第１節と第２節を見てきてください（５月１２日，入谷)。

前回、前々回の授業後に、何人かの受講生の方から、勉強の仕方が分からない、証明の仕方が分からないといった相談を受けました。中間試験でどの受講生の方にも良い点をとっていただきたいので、多少解説の順番は前後しますが、次回は、定理 1.1（p.9）と定理 1.2（p.19）の証明を例に、(収束や連続性の）証明はどうやってすればよいかを解説したいと思います (５月１４日、高羅)。

今日の授業後に 3 ページの図 1.1 について質問に来られたとある受講生の方へ。2 ページの「自然数の上方非有界性から、」から始まる最後のパラグラフを見てください。そこでは、検討を要するのは h が 1 を超えない場合だとありますね。以下、$1/n < h$ を導き出す手順が示されています。それを図示したのが、図 1-1 というわけです。h が 1 を超えない場合 $h < \frac{1}{h}$ が成立しますね。またわからなければ遠慮なく聞いてください（５月１７日、高羅)。

課題 2.1.1、2.2.1 と 2.2.2

TA の高羅です。５月２４日までの課題を掲示します。少し多いですが中間試験も近いので。今回は今日の授業で習った「関数の微分可能性」に関する問題です。問題 2.1.1 の意図は微分の定義を理解し、証明で用いることができるかを確認すること、問題 2.2.1 の意図は微分の計算ができるようになること、問題 2.2.2 の意図は少し複雑な関数でも微分可能性を確認できることです。頑張って取り組んでください（５月１７日、高羅)。

問題 2.1.1（p.39：微分の公式）

（1）実数値関数 f は $\hat{x} \in \mathbb{R}$ で微分可能であるとする。このとき、関数 $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} kf(x)$ は $\hat{x}$ で微分可能で、$\psi'(\hat{x}) = kf'(\hat{x})$ であることを確認しなさい。

（2）実数値関数 $f,\ g$ は $\hat{x} \in \mathbb{R}$ で微分可能であるとする。このとき、関数 $\psi(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x)+g(x)$ は $\hat{x}$ で微分可能で、$\psi'(\hat{x}) = f'(\hat{x})+g'(\hat{x})$ であることを確認しなさい。

問題 2.2.1（p.41-48：いろいろな関数の微分）　次の関数を微分しなさい。

（1） $f(x) = x \sin x$

（2） $f(x) = \cos(\sin x)$

（3） $f(x) = e^{x^2}$

（4） $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$

（5） $f(x) = a^x + b^x,\ a > 0,\ b > 0$

問題 2.2.2（p.39：微分の公式、pp.41-48：いろいろな関数の微分）

（1）関数 f を $x \neq 0$ であれば $f(x) = \sin \frac{1}{x}$、$x = 0$ であれば $f(x) = 0$ と定義する。このとき、関数 f は微分可能であるか確認しなさい（ヒント：f は $x \neq 0$ において微分可能か、$x = 0$ において微分可能かを確認する）。

（2）関数 f を $x \neq 0$ であれば $f(x) = \frac{x}{1+e^{1/x}}$、$x = 0$ であれば $f(x) = 0$ と定義する。このとき、関数 f は微分可能であるか確認しなさい。

お知らせ：5 月 31 日に中間試験をします。
準備を始めてください。
試験の範囲は，4 月 12 日から 5 月 24 日の
講義の内容までです（5 月 6 日，入谷）。
持ち込みは不可です。

Q11. 入谷先生、３つほど質問がございます。よろしくお願いします。授業中にお書きになった図について（五月晴、５月２０日）
前回の授業のなかで、先生は「直感的には $h \to 0$ のとき

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h}$$

は接線の傾きに近づいていくが、いつも接線とは限らない」とおっしゃって、図をお書きになりました。あの図は原点で微分可能でな

いと理解してよいのでしょうか。

A11. 鯉のぼりの季節はすぎましたが，今日は五月晴れですね（5 月 21 日，入谷）。

さて，「接線」というのは，幾何学的に「ある直線 L が平面を二つに分けるときに，ある図形が分けられた平面の片方にあり，しかも図形上の一点を L と共有している」という理解をすることでいいですか。 この前の講義での，関数のある点における微分はその点での，接線の傾きと一致しているというのは，直感的に理解できると思います。しかし，

$$y = x^3,\quad y = 0$$

の二つを図に描いてみますと，(i) $x > 0$ では曲線 $y = x^3$ は直線 $y = 0$ の上にあり，(ii) $x < 0$ では曲線 $y = x^3$ は直線 $y = 0$ の下にあり，さらに，(iii) 点 $(x, y) = (0, 0)$ は共有されています。そして，(i) と (ii) がありますので，$y = 0$ は接線には見えません。しかし，$y = x^3$ は**微分可能**（講義でやりましたね）で，$x = 0$ **における微分は 0 です**。

Q11-1. 入谷先生、コメントありがとうございます。(五月晴、５月２１日）

今まで、私の頭のなかでは、実数値関数 f の x における微分を求めることは、幾何学的には、f のグラフの $(x, f(x))$ における接線を求めることなのだと理解してきました。$y = x^3$ が微分可能なのは了解可能ですが、この間の図、そして先生からの上のコメントを受け、微分するということを幾何学的にどう理解すればよいのか少し混乱しています。コメントをいただければ幸いです。

Q11-1. どういたしまして（5 月 21 日，入谷)。

上の状況 (i) $x \geq 0$ では曲線 $y = x^3$ は直線 $y = 0$ の上にあり，(iii) 点 $(x, y) = (0, 0)$ は共有されている，を見てみますと，平面の第一象限では，$y = 0$ は接線になっています。もちろん，第三象限でも接線になっています。しかし，全体では接線になっていません。ですから，微分をするという作業は，幾何学的には「もし接線

が存在するとすれば，その接線が取るであろう傾きを計算する」ということになります。

Q12. 合成関数の微分可能性の証明（p.40 の脚注１)）について
(五月晴、５月２０日)
私は実は昨年度の「経済数学」の講義にも出席し先生の講義を聴かせていただいた者です。昨年度もそうですが、前回の授業でも合成関数の微分可能性の証明で、$\Delta y = 0$ のケースが考慮されていないからこの証明は不十分だという口頭説明で終わりました。テキスト 40 ページの脚注１）にある $\Delta y = 0$ の可能性を許容した証明はどんなものなのか昨年度から気になっております。お手数ですが、この場を借りて、証明をしていただけないでしょうか。よろしくお願いします。
A12. 証明をフルに書くと長くなるので，簡単にやります（5 月 21 日，入谷)。
$f(y), g(x)$ を微分可能な関数とし，$h_n(\neq 0)$, $m = 1, 2, \ldots$ をゼロに収束する任意の実数列とします。$y = g(x)$, $\Delta y_n = g(x + h_n) - g(x)$, $n = 1, 2, \ldots$ と定義します。Δy_n の無限個のものがゼロであるとき，

$$g'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta y_n}{h_n} = 0$$

が成立します。さらに，ゼロとなる Δy_n に対して，

$$(\Delta z_n =)f(g(x + h_n)) - f(g(x)) = f(y + \Delta y_n) - f(y) = f(y) - f(y) = 0$$

ですから，

$$(f(g(x)))' = \lim_{n\to\infty} \frac{\Delta z_n}{h_n} = 0$$

となります。したがって，$(f(g(x)))' = 0 = f'(g(x)) \times g'(x)$ が成立しています。

一方，Δy_n の有限個のものがゼロであるときには，ある番号以降はゼロでなくなりますから，講義でやったように，Δy_n で割ったりかけたりしてやることができます。

Q12-1. 入谷先生、ありがとうございます。頭のなかがすっきりしました。(五月晴、５月２１日)

Q13. $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ について（五月晴、５月２０日）
前回の授業で、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ が出てきました。この場合、$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ で一つの記号とみて、$\mathrm{d}y$ や $\mathrm{d}x$ それぞれには意味をもたせないという理解でよいのでしょうか。

A13. **五月晴**さん有り難う，講義では説明するのを忘れていました（5 月 21 日，入谷)。
おっしゃるように，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ は分数のように書いていますが，分数ではありません。分数 $(f(x+h)-f(x))/h$ の極限という意味です。いろいろな経済学の本には，$\mathrm{d}y = f'(x)\mathrm{d}x$ のような書き方がでてきます。これは 全微分 の書き方です。このときには，$\mathrm{d}y$ も $\mathrm{d}x$ も数として扱えます。現在の定義では，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ はひとかたまりで，ある数または導関数を表していると理解してください。全微分は第 4 章であつかう多変数の微分で登場します。楽しみに（？）していて下さい。

Q13-1. コメントありがとうございます。４章の講義を楽しみにしております（五月晴、５月２１日）

○　**第六回の講義**（5 月 24 日）には，テーラーの定理を紹介します。準備をなさる方は教科書の第 2 章第 3 節を見てきて下さい（5 月 21 日，入谷)。

Q14. テキストの問題 1.1 に関して (Yuji Matsuoka 5 月 24 日)
解答では、m を用いたものが書かれていますが、出来れば m を用いない証明があれば知りたいのですが。記載されている証明方法ももちろん理解できるものなのですが。

証明問題の模範解答を見るときに思うのですが、非常に鮮やかに証明されているものが出てくることがあります。しかし、いざ自分で証明をするにあたって、その鮮やかな手法に気付けないことも多々あります。気付けないこと自体が力不足なのかも知れませんが。こうした点から、私自身としては、地道な証明があるならば長くなっても、そちらを選択したいという立場です。証明問題に対する真摯に取り組むにあたってとるべき姿勢についても、お聞き出来ればと思うのですが。講義とは離れる質問で大変恐縮なのですが、よろしくお願いいたします。

A14. **Matsumoto** さん，初めてのご質問ですね，歓迎します（5 月 24 日，入谷)。

A14′. Matsuoka さん，すみません，お名前を間違いました”。高羅さんに教えてもらって気がつきました（5 月 24, 25 日，入谷)。テキストの問題 1.1 には，(1), (2), (3) の 3 つがありますが，おそらく，ご質問は (1) の証明についてですね。(1) は「c を正の定数とするとき，$c/n, c = 1, 2, \ldots$ がゼロに収束することを，アルキメデスの原則から考察せよ」ということでした。

この問題の意図は次のようです。$1/n, n = 1, 2, \ldots$ はゼロに収束するのは，アルキメデスから知られた。じゃあ，その定数倍も同じではないか，という問題です。これは，定理 1.1 の (iii) につながっていくものです。この問題によって，アルキメデスの原則への理解を明瞭にしようという目的もあります。証明を逐一載せてみましょう。証明の本体には赤の色を付けています。のこりは解説です。

(Step 1)「アルキメデスの原則より，任意の正の数 h にたいして，ある番号 $\bar{n}$ 以上の番号 n にたいして $0 < 1/n < h$ である」。これは，これまでの，実数列 $1/n, n = 1, 2, \ldots$ がゼロに近づくということですね。しかも，任意に選ばれた $h > 0$ というものや，これに対応する $\bar{n}$ はこれからも使われます。

(step2)「c を正の定数とする。$c \cdot \bar{n}$ を超える自然数を $\bar{m}$ とすれば，$c/\bar{m} < c/(c\bar{n}) = 1/\bar{n} < h$ となる」。このへんで，$c/n, n = 1, 2, \ldots$ に視点を移しつつあります。**意識しておかねばならないのは，収束**

問題 1.1 (1)	(1.4) 式
列 $c/n, n=1,2,\ldots$	列 $a_n, n=1,2,\ldots$
0（列の極限）	a（列の極限）
$\forall h>0$（任意の正の数 h に対して）	$\forall h>0$（任意の正の数 h に対して）
$\exists\bar{m}$（ある番号 $\bar{m}$ が存在して）	$\exists\bar{n}$（ある番号 $\bar{n}$ が存在して）
$m' \geq \bar{m}$ であれば	$n \geq \bar{n}$ であれば
$0 < c/m' < h$	$\mid a_n - a \mid < h$

の定義である教科書 5 ページの (1.4) 式です。Step 1 の $\bar{n}$ では新たな列 $c/n, n=1,2,\ldots$ に関する，(1.4) 式における $\bar{n}$ としては使えないので，新たな番号 $\bar{m}$ を c と $\bar{n}$ を用いて準備したというわけです。その意味では，$\bar{m}$ なしでは，やれません。
(Step 3)「しかも $\bar{m} \leq m'$ であればどのような自然数 m' であっても，$0 < c/m' < h$ である。このようにして，実数列 c/m, $m=1,2,\ldots$ がゼロに収束する」。この部分で，問題となっている列 $c/n, n=1,2,\ldots$ に対して，(1.4) が成立することを示しています。ここでの議論と (1.4) との対応を示しますと，となっています。最後の $0 < c/m' < h$ は $\mid c/m' - 0 \mid < h$ であることは判りますね。この意味でもやはり，m' や $\bar{m}$ なしでは，議論ができなくなっています。m を用いず他の記号を使っても本質は同じですね。
ご覧のように，以上はエレガントな思いつきではありません。列 $c/n, n=1,2,\ldots$ に対して，(1.4) の形式での議論ができることを，定義通りにまっすぐに示したものです。キーは (1.4) を利用して収束を示す（定義を用いる），そのときにアルキメデスを用いる（問題の要求をみたす）という，二つでした。
証明を与えるという作業には**まず定義に戻る**，を基本姿勢になされば良いと思います。そうすれば，何をやればよいかが判ります。

TA の高羅です。今日要望があった問題 2.2.1 の解答を掲示します。途中計算は省略しますが、() 内にヒントを載せておきます。参考にしてください (5 月 24 日、高羅)。

問題 2.2.1 の解答

（1） $f'(x) = \sin x + x\cos x$　（関数の和、積の微分および三角関数の微分を用いる）
（2） $f'(x) = -\sin(\sin x) \times \cos x$　（合成関数の微分および三角関数の微分を用いる）
（3） $f'(x) = e^{x^2} \times 2x$　（合成関数の微分および指数関数の微分を用いる）
（4） $f'(x) = \frac{ad-cb}{(cx+d)^2}$　（関数の商の微分を用いる）
（5） $f'(x) = (\log a)a^x + (\log b)b^x$　（関数の和の微分、指数関数の微分を用いる）

Q15. 2005 年度の基礎経済数学中間テストの問題 1 に関して (Rokko、 5 月 26 日)
中間試験の勉強にあたり、入谷先生のホームページの過去の講義のところに「2005 年度の基礎経済数学中間テストのねらいと解説」があることを知り、ダウンロードしました。その問題 1 は

実数の全体 $\mathbb{R}$ を定義域とする $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\hat{x} \in \mathbb{R}$ で微分可能であるならば、この関数 f は $\hat{x} \in \mathbb{R}$ において連続であることを示しなさい。

という問題です。解答では、$h_n, n = 1, 2, \cdots$ を任意のゼロに収束する実数列とし、

(i) 有限個（ゼロ個も許す）の n について $h_n = 0$ となっている場合
(ii) 無限個の n について $h_n = 0$ となっている場合

に分けて議論しています。(ii) ではさらに、

$h_n \neq 0$ となる n が有限個である場合（(ア）とする）
$h_n \neq 0$ となる n が無限個である場合（(イ）とする）

に分けて議論しています。前座が長くなりましたが、この（イ）で質問がございます。(イ) では集合 F を

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \{n_1, n_2, \cdots, n_m, \cdots\},\ n_i < n_{i+1},\ i = 1, 2, \cdots$$

と定義し、$n \in F$ と $n \notin F$ に分けて議論をしたうえで、したがって、これらを総合すれば

$$\lim_{n\to\infty} f(\bar{x}+h_n) = f(\bar{x})$$

ということになるとあります。この「これらを総合すれば」のところをもう少し解説していただけないでしょうか。よろしくお願いします。

A15. Rokko さん，古い問題を発掘してこられましたね（5 月 26 日，入谷)。

(イ）のケースで，番号の集合 F は $n_i \in F$ なら，$h_{n_i} \neq 0$，$n \notin F$ なら，$h_n = 0$ という特徴を持っているわけです。したがって，

$$f(\hat{x}+h_n) = f(\hat{x}),\ \forall n \notin F$$

となっています。この式を (1) とします。いま，F のメンバーたち $n_1, n_2, \ldots$ について，

$$\lim_{i\to\infty} f(\hat{x}+h_{n_i}) = f(\hat{x})$$

が成立するとします。この式を (2) とします。(1) と (2) の事実を総合して，

$$\lim_{n\to\infty} f(\hat{x}+h_n) = f(\hat{x})$$

が得られる，ということを言っています。

最後のつめを，いま少し詳しくやってみましょう。直前のものをのぞいて，(1) と (2) が成立するとします。(2) 式から，任意の正の数 h にたいして，ある番号 $\bar{i}$ があって，$i \geq \bar{i}$ であるならば，

$$|f(\hat{x}+h_{n_i}) - f(\hat{x})| < h$$

となります。ですから，これと (1) 式から，$n \geq n_{\bar{i}}$ であれば，

$$|f(\hat{x}+h_n) - f(\hat{x})| < h$$

となります。これは f が $\hat{x}$ で連続であることを示しています。教科書 5 ページの (1.4) の $\bar{n}$ の役割をここでは，$n_{\bar{i}}$ が果たしているのですね。

Q16. 中間値定理に関して (Rokko、 5 月 28 日)
他の経済数学のテキストなどでは

> 実数値関数 f は区間 $[a, b], a \leq b$ で連続であるとする。このとき、$f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 γ を値にとる、$f(c) = \gamma$ となる $c \in (a, b)$ が存在する。

を中間値定理としているものが多い気がします。入谷先生のテキストの 31 ページで、定理 1.6 を中間値定理としているのには何か意図があるのでしょうか。両方の定理が同値であることは了解可能ですが。

A16. Rokko さんそんなことまで言えるのか！と驚いて（喜んで）もらえると思ったから，この形にしました（5 月 28 日，入谷)。
通常の中間値の定理は，あなたの仰るように表現されます。一見すると，中間値の定理がこの形になるのは，言い過ぎな感じがします。しかし，ワイエルシトラスの定理から，$f(\cdot)$ は閉区間 $[a, b]$ 上に最大値と最小値があるはずですから，通常の中間値の定理から最大値と最小値の間の値はどこかで達成されます。これが $f([a, b])$ が区間になるという結論にいたる直感です。
本の著者の多くは「驚いて（喜んで）もらえる」と感じて新奇な表現を選ぶことがよくあります。一寸した発見に喜んでしまう，子供のような気持ちなのです。でも，読者にとっては，ありがた迷惑になってしまう可能性もありますね。その時には『小さな親切＝大きな迷惑』となるかもしれません。この教科書では，そのような「著者の遊び」は少ないのですが，ここではそれをやってしまった（？）わけです。

Q17. ロルの定理などに関して (Rokko、 5 月 28 日)
前回の授業で、ロルの定理、平均値定理、そしてテーラー展開定理を習いました。平均値定理については説明がありましたが、ロルの定理、テーラー展開定理の経済学における応用例を教えてください。よろしくお願いします。

A17. Rokko さん，ロルの定理はさておき，テーラーの定理はよく使います（5 月 28 日，入谷)。

テーラーの定理の応用は数多く見ます。たとえば，動学モデルを微分方程式で書くとします。経済に長期均衡があって，それからほんの少しパラメータが変化したときに，どのように経済が動いていくかを議論したいとします。そのときに，一般形の動学方程式を取り扱うのは大変面倒です。それで，線形近似をして，定数係数の微分方程式に書き直すと大変便利です。線形近似にはこの前も授業で申し上げた「テーラー近似（テーラー展開を２次まで行って，２次の項を無視したもの）」を用います。他にも，最大化の条件，例えば，ラグランジュの一階の必要条件は経済学にはよく出て行きます。それが凸性の条件が成立している場合には，そのまま十分条件になります。それを示すにもテーラー展開を使います。

1.4　第３章 行列と行列式

第３章についての質問はこの下にどうぞ。

○　**第八回の講義**（6 月 7 日）には第３章に入ります。テーマは「行列と行列式」です。予習される方は教科書の第３章の１節と２節を見てきてください。これまでの講義はどちらかといえば，理論的でした。これからはどんどん実際的な議論になっていきます。理解することは易しくなっていきますが，実際に使えるようになることがより一層要求されます。練習をすることがキーになっていきます。

行列は次のように書きます，編集画面をみると￥￥の後に改行をしていない事が判るでしょう。途中で改行を入れると行列を上手く書かないようです（6 月 3 日，入谷)。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

みなさま中間試験お疲れさまでした。試験の採点が終わりました。今週の土曜日にはみなさまのもとに返却されるでしょう。１章や２章で習った収束の概念や連続性、微分は後々の章でもちゃっかりと出てきます。今

回の試験で不本意な結果に終わった人はしっかりと復習してこれらの概念を早くマスターすることが、期末試験に向けた一歩です　（６月４日、高羅)。

TA の高羅です。今日の解説でお分かりのように、中間試験はほとんど練習問題と類似の問題でした。ですから、強い要望がない限り、私のほうで中間試験の解答を作成する予定はありません（入谷先生が作ってくださるかもしれませんが)。とある受講生の方が授業後、「もう一度中間試験の問題をやり直して解答を作成したら採点してくれますか」と言いに来ました。みなさんも彼の心意気を見習ってもう一度やり直してみてください。それを私のところに持ってきていただいたら、いつでも、そして何回でも、もう一度採点しますよ（６月７日)。

今日アナウンスし忘れましたが、３章の問題は９日月曜以降に掲示します。ただ、この掲示板に書くのが大変なので、pdf ファイルで先生のホームページ上に載せてもらうかもしれません。月曜以降質問掲示板をチェックするようにしてください（６月７日、高羅)。

中間試験の問題２．の問題と解答

微分の計算自体は慣れですが、解答がないと合っているのか間違っているのか不安なところがあるので、問題２．の解答を掲示します（念のため一次導関数も)。試験では勉強不足で微分の計算がうまくできなかったという人は、テキストの 2.1 節、2.2 節を参考にして、再チャレンジしてみてください。よく分らないという人がいれば遠慮なく申し出てください (６月８日、高羅)。

問題 2.　次の関数の二次導関数を求めなさい。

（１）$f(x) = \frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}},\ x > 0$
（２）$f(x) = e^{-2x}\cos 2x$
（３）$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$
（４）$f(x) = x^x,\ x > 0$
（５）$f(x) = a^x \log(1 + x),\ a > 0,\ x > 0$

解答

（1） $f'(x) = -\frac{1}{2} \times x^{-\frac{3}{2}}$， $f''(x) = \frac{3}{4} \times x^{-\frac{5}{2}}$

（2） $f'(x) = -2 \times (\cos 2x + \sin 2x) \times e^{-2x}$， $f''(x) = 8 \times \sin 2x \times e^{-2x}$

（3） $f'(x) = (x^2 + 3x + 2) \times e^x$， $f''(x) = (x^2 + 5x + 5) \times e^x$

（4） $f'(x) = (\log x + 1) \times x^x$， $f''(x) = x^x \times (\frac{1}{x} + (\log x + 1)^2)$

（5） $f'(x) = a^x \times \log a \times \log(1+x) + a^x \times \frac{1}{1+x}$， $f''(x) = a^x \times \{(\log a)^2 \times \log(1+x) + \frac{2\log a}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\}$

問題 2.3.5（1）の解答訂正

問題 2.3.5（1）の解答で少しタイプミスがあったので掲示します。ページ番号はお配りした第 2 章解答編のページ番号に対応しています（6 月 9 日、高羅）。

6 ページ 2 行目：

$$\lim_{x \to x} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$$

となっていますが、$x \to x$ は $x \to c$ の誤りです。
6 ページ 7 行目：区間 $[x, y]$ において f であり、(x, y) で微分可能であるから
6 ページ 8 行目：つまり、ある $c \in (x, y)$ が存在して、

Q18 テーラー展開とテーラー級数について（6 月 9 日、紫陽花）
入谷先生、級数に関連して 3 点質問があります。よろしくお願いします。テーラー展開とテーラー級数の違いは近似の精度の違いととらえてよいのでしょうか。
A18. 紫陽花はいま綺麗に咲いています。よく勉強しておられますね（6 月 9 日，入谷）。
テーラー展開では，関数が n 回微分可能であれば，n 次までテーラー展開ができます。 では，無限回微分可能であればどうか。こ

こで問題になっているテーラー展開とテーラー級数は,

$$f(x) = f(0+x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0+\theta x)$$
$$f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \ldots$$

ですね。ここで，$f^{(n)}$ は f の n 次導関数です。f が何回でも微分可能ならば，最初の式の n をいくらでも大きくできて第 2 の式と一致するかどうか，ですね。それには，最後の $x^n f^{(n)}(\theta x)/n!$ は $n \to \infty$ のときゼロに収束するかが問題です。もしこの項がゼロに収束するなら（通常はゼロに収束するでしょうね），その時できあがるテーラー展開は，あなたのおっしゃるように，n が高ければ高いほど精度は高くなる（$f(x) = f(0+x)$ の近似値として）でしょうね。

Q19 教科書 55 ページについて（6 月 9 日、紫陽花）
教科書 55 ページの最後のパラグラフに、一般に $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$ の形の級数をべき級数と呼び、解析学では重要なテーマであるとあります。ここの部分をもう少しお話していただけないでしょうか。

A19. 関数解析，とくに，複素関数論の議論をするときに，重要になります（6 月 9 日，入谷）。

経済学では，あまり馴染みがないというか，見ることが少ない問題なので，**お話**として読んで下さい。おっしゃっているベキ級数の $x-\alpha$ を z とおいてみると $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ となります。ここで，$z \in \mathbb{C}$ で $\mathbb{C}$ は複素体です。いま，$\overline{\lim}_{n\to\infty}|a_n|^{1/n} = 1/r$ とすれば，$|z| < r$ であれば，ベキ級数は収束し，$|z| > r$ ならば収束しません (Cauchy Hadamard（コーシー・アダマール）の定理)。このとき，r を収束半径といいます。そうすると，ベキ級数から関数 $f(z) = \sum a_n z^n$ を定義すると，f は収束半径内で，連続関数になり，f のテーラー展開が $\sum a_n z^n$ となることが示されます。たとえば，以前の質問と回答，Q6, A6 にある三角関数 $\sin, \cos$ の定義域は実数体ですが，その収束半径は ∞ で収束半径内で連続関数となります。これは，各自で確認できるでしょう。

このように議論を組み立てていき，有名なアベルの定理とか，代数学の基本定理（一次以上の多項式は根を有する）あるいは Liouville （リュービル）の定理に至ります。また，統計で用いる母関数 (generating function) もベキ級数の一種となっています。この分野には，吉田洋一『函数論（第 2 版)』(岩波書店，1965 年）という優れた教科書があります。高木貞治『解析概論（改訂第 3 版)』(岩波書店，1961 年）にも解説があります。

Q20 初等関数について（6 月 9 日、紫陽花）

指数関数や三角関数などは初等関数と呼ばれますが、どのような点で初等関数と呼ぶのでしょうか。

A20. 何故初等関数と呼ぶのかですか？中等関数や高等関数というのは聞いたことがありませんし，ウーン，判りません（6 月 9 日，入谷)。

アジサイのように，**赤**くなったり**青**になったりしそうです。基本的でよく使われる関数，という意味で理解していました。英語では elementary function ですね。多分，多くの関数がこれらで表現できるので，そう呼ばれるのでしょうか。よく知りません。判れば，お答えします。

岩波『数学辞典』には定義が載っていますが，どこが “初等” なのかは不明です。

高木先生の『解析概論（改訂第 3 版)』201page 第 5 章「解析函数，とくに初等函数」には，解析関数の一つとして次の説明があります。

> 変数を複素数まで拡大することは，19 世紀以後の解析学の特色で，それによって古来専ら取扱われていたいわゆる初等関数の本性が明らかになって，微分積分法に魂が入ったのである。複素数なしでは，初等関数でも統制されない。解析関数は Weierstrass （ワイエルシュトラス）の命名であるが，それは複素変数の函数が解析学における中心的の位置を占有することを宣言したものであろう。
>
> 解析函数の理論を，かつては函数論とも略称したが，それの一

般的の部分が，現代的の初等解析において欠くべからざる最も重要な部分であることは現今，数学的常識である。

藤原松三郎『微分積分学』(内田老鶴圃新社，昭和 9 年）の第 1 章，第 8 節の 122page には，超越関数と並べて，次のように書いています。

(有理函数，代数函数，逆函数，三角函数，逆三角函数，指数函数，対数函数のあとで）以上論ジタ諸函数及ビソレ等ノ有限回ノ結合ニヨッテ得ラレル合成函数ヲ初等函数ト呼ンデキル。代数函数デナイモノヲ超越函数トイフ。(以上，6 月 10 日調)

杉浦光男『解析学 場 J』(東京大学出版会，1980）や Saff, E.B., A.D. Snider, and L.N.Trefethen (1993) ”’Foundations of Complex Analysis for Mathematics, Science, and Engineering”’, Prentice-Hall では一章を初等関数に充てているが，初等関数と呼ぶゆえんは説明されていない。 6 月 12 日

高橋礼司『複素解析』(東京大学出版会，1990) でも初等関数の説明に 1 節を充てている（3 ページ）が，名前の理由は書かれていない。6 月 13 日

Q20-1 入谷先生、丁寧なコメントありがとうございます。

おかしな質問をして困らせてしまってすみません。初等関数の「初等」と呼ばれるゆえんはさておき、初等関数と呼ばれる関数は何か共通の性質をもっているから、一括りされるのでしょうか (6 月 14 日、紫陽花)。

A20-1. ここに書く回答は僕の感想に近いもので，多少不確かです (6 月 16 日，入谷)。

回答が遅くなり，すみません。この質問が目に入っていませんでした。ページがこれだけ長くなってくると，最後しか見えなくなってきました。

初等関数の「共通の性質」というのはあまり知りませんが，19 世紀前に主に取り扱われていた関数で，よく知られた関数という意味なのでしょう。19 世紀に入って，楕円関数 (elliptic functions) が発見されます。これが初等関数では表現できないものであることが判

り，代数関数論を形作っていきます。楕円関数の理論を Bellman が the fairyland of mathematics とよんだと聞きます。リーマン，ワイエルシュトラスらが研究を推進します。後に，Hilbert が集合論を楽園 (Cantorian paradise) と呼んだのと同様の響きを持っています。

練習問題 6 月 7 日の講義への練習問題は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm にｐｄｆファイルをダウンロードできるようにしてあります。当該のページはこの質問掲示板に入る直前のページです（6 月 9 日，入谷)。

○**第九回の講義**（6 月 14 日）には，行列式の性質を話します。おそらく，クラメールの公式まで進みます。予習される方は教科書の第 3 章の 2 節と 3 節を見てきてください（6 月 10 日，入谷)。

Q21 背理法による証明に関して (Yuji Matsuoka 6 月 14 日)
講義内容とは少し外れているのですが、質問させてください。
A ならば B を証明するにあたって、背理法を用いるとします。
B の否定を取って、A かつ B でないということから矛盾を導くことになります。
A かつ B でないという命題を変形していくことで、B であるという帰結が得られたとします。
これは、A かつ B でないということ矛盾しているので、背理法から A ならば B であるということになります。

ある証明をするにあたって、上のような背理法を用いて証明しようとしているのですが、どうも背理法の用い方が適切であるのか疑問に思っています。上の証明の流れで、証明に穴が無く通っているのでしょうか？お忙しい中、講義と少し外れた質問なので大変恐縮なのですが、回答をいただければと思います。宜しくお願い致します。
A21. いえいえ，気にしないで質問してください（6 月 14 日，入

谷)。

Matsuoka 君の言っている「$A \wedge (\neg B)$ から B を導く」作業において，$\neg B \Rightarrow B$ を導くことは難しいですね。B が常に正しい命題 (恒真命題) でない限り無理です。多分，あなたは $A \Rightarrow B$ を証明なさったのでしょう。これだと，$A \Rightarrow B$ が証明されたことになりますので，B が偽であったと仮定する必要はなかったことになります。

重複的ではありますが，A と $\neg B$ が真であると仮定して，$A \Rightarrow B$ を導いて，矛盾している。だから，$A \Rightarrow B$ は正しいという議論自体は，間違いではありません。

背理法は，次のようです。C という恒真命題があって，$A \wedge (\neg B)$ が真であるとすると，$\neg C$ が真であることが示される。これは矛盾だから，$\neg(A \wedge (\neg B))$ が真でなければならない。つまり，$(\neg A) \vee B$ が真，言い換えると，$A \Rightarrow B$ が真だという論法になっています。

次回の課題

問題 3.1.8、3.1.9 および 3.2.2 は各自解答したものを来週提出してください。アナウンスしましたが、宿題のできが成績に反映されることはありません。ですので、分からないなら、分かるところまで書いて出していただければそれで結構です。今日習った行列式の性質、余因子、クラメールの公式についての練習問題は月曜以降にホームページ上に載せてもらいます (6 月 14 日、高羅)。

Q21-1「A と $\neg B$ が真であると仮定して，$A \Rightarrow B$ を導いて」について (6 月 15 日、とある受講生)。

先生と matsuoka さんの議論に割り込んで恐縮ですが、私もよく分からないので。先生の上のコメント「A と $\neg B$ が真であると仮定して，$A \Rightarrow B$ を導いて」で、「A かつ $\neg B$ が真である」ことを用いて、「B が真である」ことを導けば、$A \Rightarrow B$ が真であることがいえたと考えてよいでしょうか。

Q21-2 背理法による証明に関して (Yuji Matsuoka 6 月 15 日)

入谷先生、早速の解答をいただきまして、ありがとうございます。

まだ、もう少し自分の中で整理しきれていない感じなので、もう一度復習して考えてみたいと思います。現状で、頭の中で描いていることを書かせて頂くと、

(Step 1)　$A \Rightarrow B$ を証明したい

(Step 2)　では、背理法を使ってみよう。

(Step 3)　$A \wedge (\neg B)$ から考えていこう

(Step 4)　$A \wedge (\neg B)$ を変形していくことで、得られた帰結は $\neg B$ ではないことが得られる。

(Step 5)　これは、Step 3 に矛盾している。では、何がおかしかったのか？

(Step 6)　$\neg B$ がおかしい。よって、$A \Rightarrow B$ という結果が得られる。

まだ、自分の中で、頭が整理出来ていない感じで、人に何が分からないのか説明できない状態です。質問できる段階まで、頭の中を整理してから、また出直してきたいと思います。

昨日の講義のクラメールの公式の導出は、非常に楽しかったです。普段は、ツールとして無味乾燥に使うだけでしたが、いざ、そのツールがどういう出自たどっているのかを考えることは、非常に興味深いです。今後も、当たり前として使っているツールについて、考える機会を持てればと思います。

長々と書いてしまって申し訳ありません。

A21-1 と-2. 背理法再考ですね（6 月 15 日，入谷）。

機種依存文字といいまして，計算機によって異なるコードとなる文字があります。丸数字とか，全角のローマ数字がそうです。僕の計算機からは読めなかったので，Matsuoka 君の文章を書き換えています。多分内容は変わっていないと思います。

とある受講生君のご質問も，基本的に同じなので，まとめて答えさせて下さい。

僕が注目しているのは，Matsuoka 君の Step 4 の「$A \wedge (\neg B)$ から $\neg B$ でないことが得られる」という部分です。とある受講生君

の質問にも同じ部分があります。これらは，「$A \wedge (\neg B)$ が真なら B が真」が得られるということですね。仮定の一方の $\neg B$ から B が得られるのはまず無理ですね。ですから，もし (Step 4) が上手くいっているなら，「A を真とすれば，B が真が示せた」ということですね。

ここで，気がついてください。$A \Rightarrow B$ の証明が終わっていますよ。(Steps 2, 3, 5) をとばして，一挙に (Step 6) が得られているわけです。

背理法を使う場合には，多くの場合，(Step 4) の結論部分において，B is true が示されるのではなくて，$0 > 0$ とか，$1 = -1$ のような恒真命題（いつも正しい命題，$0 = 0, 1 \neq -1$）の否定の成立が示されるということになります。

Matsuoka 君の手続きを背理法でないということはできません。Matsuoka 君の立論もとある受講生君のものも，間違ってはいず，正しい推論になっています。申し上げたいのは，その手続きでは背理法を使わなくても証明が完了していて，しかも，もっと短くなっているはずだということです。

Q21-3 入谷先生、ありがとうございました（6 月 17 日、とある受講生）

背理法再考勉強になりました。

Q22 微分方程式、差分方程式 (Yuji Matsuoka 6 月 15 日)

重ねての投稿で、申し訳ありません。

専攻の関係上、微分方程式、差分方程式を高い頻度で用いることになるのですが、この分野を本格的に学ぶにあたって、適切な入門書のようなものを紹介していただきたいのですが。

テキストの第 2 章 5 節は読みました。

A22. 微分方程式の教科書はたくさんあります（6 月 15 日，入谷)。

微分方程式には，ポントリアギン著・木村千葉訳 (1968) 『常微分方程式』共立出版，Block and Malliaris (1989), "'Differential Equations, Stability and Chaos in Dynamic Economics"', (North-Holland)，山本稔 (1979) 『常微分方程式の安定性』実教出版，等の良い教科書があります。これらは，常微分方程式の本です。成長理論では，微分方程式を扱うことが多く，最初の二つの文献に経済学者はとてもお世話になっています。Handbook of Mathematical Economics にも F. Hahn の Stability の章がありますが，誤植が多くて，初学者にはあまり勧められません。経済学では目的に応じて，様々な微分方程式を使いますので，その分野に応じた解説書をその分野の先生方にお聞きするのがよいと思います。

定差方程式（差分方程式）の教科書はあまり知りません。古いですが，高橋健人 (1961)『差分方程式』培風館，は読みやすいと思います。Hicks の『景気循環論』の第 3 章数学注に定差方程式の解説があります（但し，証明はのっていません）。今日は自宅から書いているので，これくらいしか判りません。明日大学に行って追加できる本があれば書きます。小山昭雄 (1995)『経済数学教室 7 ダイナミックシステム 上』岩波書店，にも第 1 章に差分方程式の節があります。

Q22-1 ありがとうございます。(Yuji Matsuoka 6 月 17 日)

紹介ありがとうございます。専攻が Economic Growth のため、微分方程式、差分方程式が必要になってきました。Barro,Salai-Martin の『Economic Growth』の数学 appendix にも目を通したのですが。ポントリアギン著・木村千葉訳 (1968) をひとまず、目を通してみたいと思います。また、質問させてください。ありがとうございました。

Q23 論理についての質問（6 月 17 日、Yuji Matsuoka）

いつも、度重なる質問に丁寧に答えてくださり、ありがとうございます。今回の質問は、ロジックに関する質問です。

「あらゆる鳥は黒い」という命題を否定すると、「ある鳥が存在して黒くない」ですが、この否定命題はある鳥以外の他の鳥が何色をしているのか述べているのでしょうか。

頭の中で考えていると、堂々巡りのような形になって進まなくなっ

てしまいました。お忙しいと思いますが、よろしくお願いいたします。

A23. どういたしまして。雑念にとらわれず**文字通りに**読みましょう（6月１７日，入谷)。

「ある烏が存在して黒くない」を文字通りに読んで下さい。黒くないある烏をのぞいて，何も要求していません。全部が白くても，ピンクでも，その混合でも，あるいはその一羽だけが白で他が黒でも結構です。他のことを要求していないのですから，他は何でも良いのです。

Q24 論理と集合について（6 月 17 日、匿名）

入谷先生、以下 3 つほど質問があります。よろしくお願いします。

テキストの 7 章にある論理と集合をより深く学ぼうとするとき、良書があれば教えてください。

A24. 何のために論理学を学びたいかに依存します（6 月 17 日，18 日，入谷)。

まず，７章のどの部分も何も見ずに解説できるほど読み込んでください。通常の経済理論ではこれで充分です。それを超えて，例えば，game logic のような分野をやりたいのであれば，本格的に論理学を学ばないといけません。参考文献は，A9 に挙げていますが，Halmos (1970) *Naive Set Theory*, Springer は良いと思います。いま（6 月 18 日）読み返してみますと，Halmos, *Naive Set Theory* は集合論の本で，「論理学」の本としては適切ではないですね。僕が読んだ限りでは，福山克 (1980)『数理論理学』培風館は読みやすい本です。古いかも知れませんが，井関清 (1977)『記号論理学（命題論理)』槇書店，井関清 (1978)『記号論理学（述語論理)』槇書店，も優れています。近年の game logic を詳しく知るためには，様相論理（ようそうろんり，modal logic）も視野に入れておく必要が出てきています。

Q25 中間試験の問題 3 について（6 月 17 日、匿名）

中間試験の問題 3 は、

関数 $f : (a, b) \to \mathbb{R}, a < b$ は (a, b) で微分可能とする。このとき、

（1） f が単調減少でないならば、ある $\hat{x} \in (a,b)$ が存在して $f'(\hat{x}) > 0$ である。
（2） f が単調減少ならば、任意の $x \in (a,b)$ について $f'(x) \leq 0$ である。
を示せという問題でした。ここで、関数 f の定義域を開区間で考えていますが、これは本質なのでしょうか。つまり、閉区間で定義された関数 f では（1）と（2）は成立しないのでしょうか。

A25. 多少つまらないポイントですが，本質的です（6 月 17 日，入谷)。
(1) はあなたの想定する環境でも証明できるでしょう。次に，微分は定義域の端ではできないことに注意してください。(2) では，微分が端 $x = a, b$ では定義できず，$f'(a) \leq 0$ は言えません。(2) は (a,b) でしか考えようがないですね。

Q25-1 入谷先生、コメントありがとうございます（6 月 18 日、匿名）
微分は通常端 $x = a, b$ では定義されないことは分かるのですが、仮に f が閉区間で定義される実数値関数の場合でも、(2) を開区間 (a,b) 内の任意の点 x について成立すると考えてはまずいのでしょうか。

A25-1. どういたしまして（6 月 18 日，入谷)。
まずくありません。f の定義域が $[a,b]$ であって，f が定義域で連続，(a,b) で微分可能ということなら，(2) は成立します。
定義域が $[a,b]$ でも a, b で微分を想定することはできます。ひとつは，a に関しては右微分，b に関しては左微分を考えることです。このときは，右微分とか左微分であるといっておく必要があります。
また，$f'(x)$, $a < x < b$ がありますから，f の $x = a$ での微分を，x を右から a に近づけてその極限として定義することです。これは一つの便法ですが「極限があるのか？」という問題があります。それは，f' の $x = a$ における連続性に関することになります。
そういったことを考えると，f の定義域を開区間にしておくと面倒

なことが何もなくなり，すっきりするわけです。

Q25-2 入谷先生、コメントありがとうございます（6 月 19 日、匿名）

まだすっきりしないのですが、理解が遅くてすみません。何冊かの解析学の本で該当箇所を読んでみると、「f の定義域が $[a,b]$ であって，f が定義域で連続，(a,b) で微分可能とする。」と書いているものもありますが、「f を区間 I で微分可能な関数とする。」としか書かれていないものがあります。後者の場合、f の定義域は開区間、区間 I も開区間と考えてよいのでしょうか。

A25-2. 遅くなってご免なさい（6 月 23 日，入谷）。

この質問に気がつきませんでした。済みません。

その近くに「f を区間 I で微分可能な関数とする」ことの定義がないかを調べてください。「このように表現するときには，I は開区間である」とかいう約束をしていると思います。もし，明記していなければ，I を開区間だと思うべきでしょうね。

Q26 affine 関数について（6 月 17 日、匿名）

多少入谷先生の講義とかけ離れて恐縮ですが、宮川先生のミクロ経済学 2 の講義で、affine 関数や線形関数という概念が出てきました。こういった関数についてより深く学ぼうとすると、どういった分野を学べばよいのでしょうか。良書があれば教えてください。よろしくお願いします。

A26. どのような本がよいかは，何をやりたいかによります（6 月 17, 19 日，入谷）。

直線的にお答えをすれば，数学の専門書の羅列になりそうです。大学院マスターの時点であまり，数学に深入りすることは勧めません。まず，経済学を第一にすべきです。もちろん「それ（深入り）が望みだ」とおっしゃる場合は，大いにやって下さい。学問は面白いと思うことを追求するのが一番です。

文面から受ける印象からすると，おそらく，**匿名**さんはアフィンや線形写像の一般的な定義や性質を知りたいのでしょうね。

定義を知りたいのであれば，数学辞典を調べましょう。アフィン写

像，線形写像には二階堂先生の『現代経済学の数学的方法』(岩波書店）の第 5 章にいくつかの性質が載せられています。これらの定義を見て，アフィン写像が線形写像の平行移動である点に気づいてください。何か知識が必要な場合，その都度，君の持っている数学の本の目次と索引を調べ，大学で数学辞典を調べることが良いと思います。その意味では，ある程度の数学の蔵書があるととても機動的です。それで判らなければ，僕の所に来て尋ねてください。
積分が線形写像であることが分かりますか。写像は関数にも operate するわけですね。このような専門的なラインで知識が必要な場合は，Dunford and Schwartz "'Linear Operator I, II, III"', (Wiley) が良いと思いますが，枕の厚さの本が三冊です。あるいは topological vector space では，関数空間（これも線形空間です）上の線形関数の連続性とか，そのための位相を議論します。経済学で用いると聞いたことがあるかも知れませんが，弱位相とかマッキートポロジー はこの分野で得られたものです。
上を読み返していて，もう少し親切に答えるべきだったと感じました'（6 月 20 日，入谷)。
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形関数であるとは，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が成り立つことです。$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ がアフィン関数であるとは，$\alpha + \beta = 1$ を満たす任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が成り立つことです。f がアフィン関数ならば，$f(x) - f(0)$ は線形関数になります。
Q26-1 積分が線形写像であることについて（6 月 25 日、匿名）
入谷先生、丁寧なコメントありがとうございます。生まれて初めて数学事典を開いてみました。開いてびっくり何でも載っていますね。今までいろんな数学の本をあさりまくって調べていましたが、

もっと早くその存在に気づけばよかったという感じです。入谷先生、教えていただきありがとうございます。今後の研究に活用したいです。上の先生のコメントのなかに、「積分が線形写像であることが分かりますか。」とあります。定義にもとづき確認してみました。積分は苦手です。おかしいところがあれば指摘してください。
写像 $I : f(x) \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ は線形写像である。
（証明）$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$、 $f(x), g(x) \in \mathbb{R}$ を任意とする。

$$\begin{aligned} I(\alpha f(x) + \beta g(x)) &= \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \\ &= \alpha I(f(x)) + \beta I(g(x)) \end{aligned}$$

が成立する。

A26-1. 正しい証明です（6 月 25 日，入谷）。
表記方法ですが，あなたの書いている

$$I:\ f(x) \in \mathbb{R} \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

はもっとしっかり書きたいですね。$f(x) \in \mathbb{R}$ と書くと，関数 f ではなくて，実数 $f(x)$ に写像 I が作用しているように読めます。ですから，定義域をしっかり書きたいですね。つまり，定義域を $\mathbb{R}$ 値域を $\mathbb{R}$ とする可積分関数の集合を $\mathcal{L}$ と表す。このとき，

$$I:\ f \in \mathcal{L} \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

と関数 I を定義する，と書く方がよいですね。

Q26-1-2. ご指摘ありがとうございます（6 月 26 日、匿名）。
先生のご指摘を受け書き直してみました。
定義域を $\mathbb{R}$ 値域を $\mathbb{R}$ とする可積分関数の集合を $\mathcal{L}$ と表す。この

とき，

$$I:\ f \in \mathcal{L} \mapsto \int_a^b f(x)\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$$

と定義される関数 I は線形写像である。
（証明）$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$、 $f, g \in \mathcal{L}$ を任意とする。

$$\begin{aligned} I(\alpha f + \beta g) &= \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x \\ &= \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x = \alpha I(f) + \beta I(g) \end{aligned}$$

が成立する。
A26-1-2. それでよいと思います（6 月 26 日，入谷)。
Q26-1-3. ありがとうございます（6 月 28 日、匿名)。
入谷先生、上の証明で、最初と最後の等号は定義から成立します。真ん中の等号つまり、

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

は証明なしで用いてもよいのでしょうか。
A26-1-3. 厳密には証明が必要です（6 月 28 日，入谷)。
積分の定義に戻ると，真ん中の等号が証明されます。これは基本的には，実数がそれ自身を体とする線形空間になっていること，関数の和の定義の二つからでてきます。
Q26-2 関数空間がベクトル空間であることについて（6 月 25 日、匿名)
上の先生のコメントのなかに、「関数空間（これも線形空間です)」とあります。これは、以下のようにして確認すればよいのでしょうか。
$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像全体の集合を $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ と定義する。このとき、$f,\ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),\quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

と定義して、$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ が線形空間であることを確認すればよい。

A26-2. ほぼそれで結構です（6 月 25 日，入谷）。

やや詳しく書きますと，線形空間とは，ある体 K（例として実数を考えて下さい） と加群 $\mathfrak{X}$（例として $\mathbb{R}^n$ を考えてください）があって，次の性質を満たすものです。

$$\begin{aligned}
&\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y,\ \forall\alpha \in K,\quad \forall x, y \in \mathfrak{X}\\
&(\alpha+\beta)x = \alpha x + \beta x,\ \forall\alpha\beta \in K,\quad \forall x \in \mathfrak{X}\\
&\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x,\ \forall\alpha\beta \in K,\quad \forall x \in \mathfrak{X}\\
&1x = x,\ \forall x \in \mathfrak{X}.
\end{aligned}$$

ここで，体 field というのは，演算（＋，×）のある空間で，実数体や複素体だと考えてください。加群 additive group とは次のものです。$\mathfrak{X}$ には演算＋が与えられていて，$x, y \in \mathfrak{X}$ について $x+y = y+x \in \mathfrak{X}$ であり，＋に関して neutral element 0 （ゼロ）が $\mathfrak{X}$ 内にある。neutral element とは，任意の $x \in \mathfrak{X}$ にたいして，$x + 0 = x$ となる $\mathfrak{X}$ の要素 0 のことです。さらに，群には，任意の $x \in \mathfrak{X}$ にたいて，$x + y = 0$ となるような逆元 $y \in \mathfrak{X}$ が存在する，という性質が要求されます。そのような体 K と加群 $\mathfrak{X}$ の間で演算が可能で，$\alpha \in K, x \in \mathfrak{X}$ にたいして $\alpha x \in \mathfrak{X}$ となるような演算ができるようになっているわけです。これは，x を延長して αx することができることを表していて，空間という直感にピタッときますね。

そこで，**匿名**さんの作業を眺めてみますと，体として $\mathbb{R}$, 加群として $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像全体の集合を採用しています。そして，加群とするために演算＋を導入し，体との演算も定義されました。ですから議論を完結させるために，加群の neutral element と逆元の存在を示しておきたいですね。

Q26-2-1. 加群の neutral element と逆元の存在（6 月 26 日，匿名）。

コメントありがとうございます。今までぼんやりしていた体や加群、線形空間の概念がクリアになりました。先生からのご指摘を受

け書き直してみました。加群の neutral element と逆元の存在はきちんと示せているかあまり自信がありません。おかしなところがあればご指摘ください。

$\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像全体の集合を $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ と定義する。$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ は線形空間である。

（証明の概略）$f,\ g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m),\ x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ に対して、

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

と定義する。$0(x) = 0,\ x \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であるから、$0 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ である。

$$(f+0)(x) = f(x) + 0(x) = f(x)$$

が成立する。また、$(-f)(x) = -f(x),\ x \in \mathbb{R}^n$ は $\mathbb{R}^n$ から $\mathbb{R}^m$ への線形写像であるから、$(-f) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ である。

$$(f + (-f))(x) = f(x) + (-f)(x) = f(x) - f(x) = 0$$

が成立する。よって、加群の neutral element と逆元の存在が示されたので、後は、$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ が線形空間であること、つまり体 $\mathbb{R}$ と加群 $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ に対して、

$$\begin{aligned}
&\alpha(f+g) = \alpha f + \alpha g, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \ \ \forall f, g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\
&(\alpha + \beta) f = \alpha f + \beta f, \quad \forall \alpha\beta \in \mathbb{R}, \ \ \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\
&\alpha(\beta f) = (\alpha\beta) f, \quad \forall \alpha\beta \in \mathbb{R} \ \ \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\
&1 f = f, \quad \forall f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).
\end{aligned}$$

が成立することを確認すればよい。

A26-2-1. 最後のものたちは定義的に大丈夫ですから，以上でうまくいってると思います（6 月 26 日，入谷)。

些細なことですが，加群の「加」の意味について補足します。それは，$x + y = y + x$ が成立すること，つまり，演算＋に関する可換性 commutativity が前提となっていることです。可換群，アーベル群ともいいます。

Q26-2-2. 空間という直感について（6 月 28 日、匿名）。
先生からいただいた A26 のなかに、
そのような体 K と加群 $\mathfrak{X}$ の間で演算が可能で，$\alpha \in K, x \in \mathfrak{X}$ にたいして $\alpha x \in \mathfrak{X}$ となるような演算ができるようになっているわけです。これは，x を延長して αx することができることを表していて，空間という直感にピタッときますね。
とあります。前半部分は定義に、後半部分は A26-2 であげられている 4 つの性質のところに対応していると考えたらよいのでしょうか。

A26-2-2. 空間（6 月 28 日，入谷）。
空間という直感はおそらく，$\mathbb{R}$ や $\mathbb{R}^n$ のような「どこまでも広がっている」とか,「ある目標地点に到達するのに，直線でいっても良いし，三角形を描く経路を辿っても良い」というような直感があります。前者が体と群との演算で，後者が群に導入されている演算＋で表されて，線形空間という形式になっているのでしょう。ご質問の $\alpha x \in \mathfrak{X}$ は体と群との演算だけですね。A.26-2 の 4 つの性質は，より厳密な性質を要求しています。この性質は，体には実数がもっているような＋，×についての結合則や分配則があるので，それを群との演算に組み込んでいるわけです。

Q26-3 写像は関数にも operate することについて（6 月 25 日、匿名）
入谷先生、基本的な質問で申し訳ありません。上の先生のコメントのなかに、「写像は関数にも operate するわけですね」とあります。写像と関数の区別は了解可能ですが、operate するとはどういうことでしょうか。よろしくお願いします。

A26-3. 「operate：作用する」という意味です（6 月 25 日，入谷）。
ここでは，「関数 f が定義域の要素 x に**作用, operate** して，値域の値 $f(x)$ に変換する」という感じで表現されています。「積分をするという作業」は一つの可積分関数 ϕ に対して，$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)\mathrm{d}x$ を計算することです。可積分関数にたいして実数を割り当てる関数

になっています。また，Operator は演算子（+，×，−，÷）の訳語です。じつは，演算子もある関数で，二つの実数 a, b に作用してある一つの実数を割りあてる関数となっています。以上のように聞くと，関数が「作用する，働きかける，operate する」という表現が自然だと思いませんか。

Q26-4 線形関数再考（6 月 26 日、匿名)。

A26-2. のコメントのなかで「線形空間」という概念が出てきました。この概念を知ってもう一度、A26 のなかで出てきた線形関数の定義

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ が線形関数であるとは，任意の $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ と任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対して，

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

が成り立つことです。

を読み返してみると、f の定義域 $\mathbb{R}^n$ と値域 $\mathbb{R}^m$ が線形空間になっていることに気づきます。一般に、関数 f が線形関数であるというとき、その関数の定義域、値域ともに線形空間と考えてよいのでしょうか。

A26-4. 線形関数，アフィン関数（6 月 26 日，入谷)。

そのとおりです。通常，線形関数やアフィン関数の定義域や値域は線形空間です。

中間試験の問題 1 の（3）と練習問題 1.2.1 の（2）についての注意

「中間試験の問題 1 の（3）の解答は練習問題 1.2.1（2）の解答を参考にしてください」と以前アナウンスしました。練習問題 1.2.1 (2) の解答では、解答その 1 から解答その 3 まで、3 通りの解答方法を示しています。ですが、中間試験の問題 1 の（3）を証明するのに、解答その 1 のやり方は使えないので注意してください。どうして使えないかは実際にやってみて各自考えてみるとよいでしょう。いや解答その 1 のやり方で証明できるという人は解答をもってきてください（６月１８日、高羅)。

次回の課題

６月１４日の講義に対する練習問題をダウンロードできるように先生に

していただきました。遅くなってすみません。７日分と合わせて３章の練習問題は量が多いですが、どれも手さえ動かせばできる問題です。面倒くさがらずに手を動かしてみてください。前回アナウンスしましたが、問題 **3.1.8**、**3.1.9** および **3.2.2** は各自解答したものを次回提出してください。宿題のできが成績に反映されることはありません。ですので、分からないなら分かるところまで書いて、また出したい人だけが出してくれれば構いません。こちらの意図としてはどれくらいできるのかをみたいだけです（６月１８日、高羅）。

○　**第十回の講義**（6 月 21 日）には，逆行列について話します。できれば新しい章（第４章）にも入りたいとおもいます。予習される方は教科書の第３章の３節と第４章の１節を見てきてください（6 月 19 日，入谷）。

練習問題 6 月 14 日の講義への練習問題は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm からｐｄｆファイルをダウンロードできます。皆さんは判っているだろうと思ってここには書いてなかったのですが，念のため（6 月 20 日，入谷）。

次回の課題
今日の授業中に先生が白板にお書きになった以下の Home Work を来週提出してください。なお、提出の有無が成績に反映されることはありません。出したい人だけでかまいません。来週の TA セッションのときに、この問題の解説をします。

> 点列 $h^n = (h_1^n, h_2^n)$, $n = 1, 2, \cdots$ が $(0, 0)$ に収束することの必要十分条件は、実数列 $\| h^n \|$, $n = 1, 2, \cdots$ がゼロに収束することであることを示しなさい。

今日習った逆行列に関する問題は月曜以降ダウンロードできるように先生にしてもらいます。今日少し４章に入りましたが、そこで１章で習った実数列の収束の概念が出てきましたね。本格的に４章に入る来週までに、中間試験の見直しをしっかりやっておくとよいでしょう。今のところ再提出者は４人ですが、他の人もやり直したものを私に提出してくれればいつでも採点します（６月２１日、高羅）。

Q27. 練習問題 1.3.2(2) について（6 月 22 日、Maruyama）
入谷先生、テキストの内容ではないので申し訳ありませんが、高羅さんが配布してくださっている練習問題の解答について質問をさせてください。練習問題 1.3.2(2) の解答を見ますと、

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|)$$

と書いてあります。この式のイコールの成立は明らかなのですが、どのようにしてこの式が導出されてきたのかがよくわかりません。こういうものとして覚えればよいものでしたらそれでいいのですが、どのような流れで出てきたものなのかご説明いただけるのでしたら教えていただきたいです。お忙しい中すみませんが、よろしくお願いいたします。

A27. **図で感じて**みたらどうでしょう（6 月 23 日，入谷)。
$f(x)$，$g(x)$ でもいいですが，本質的には，$\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$ であることですね。紙に，垂直に立った二つの線分（棒グラフのようなもの）を描いてください。二つの線分の低い点は同じ高さにあり，二つの線分の高い点は異なるとしてみましょう。線分の高さをそれぞれ a, b だとします。$(a + b)/2$ は二つの線分の平均の高さになります。二つの線分の高さの差は $|a - b|$ です。ですから，平均の高さに線分の高さの差の半分を加えてやる（差し引いていやる）と高い方（低い方）の線分の高さになります。 つまり，

$$\max\{a, b\} = \frac{a + b + |a - b|}{2}, \quad \min\{a, b\} = \frac{a + b - |a - b|}{2}$$

です。

問題 3.1.9 の訂正
問題 3.1.9 は正しくは、「$\cdots$ このとき $AX = [0]$ となる 2 行 2 列の行列の一般型を求めなさい」です。タイプミスが多くてすみません（6 月 2 3 日、高羅）。

Q28. 練習問題 3.1.9 と 3.2.2 について（6 月 24 日、Yuji Matsuoka）
いつも丁寧に質問に答えて下さりありがとうございます。一度、質

問を記載したつもりが、アップ出来ていなかったので再度書きたいと思います。
今回の質問は、高羅さんが配ってくださった練習問題に関する質問です。どうぞよろしくお願いいたします。
練習問題の 3.1.9 と 3.2.2 に関しては、この問題を解くことの幾何学的意味というのは何なのでしょうか？
解答の方よろしくお願いいたします。
A28. 幾何学的意味ですか。それに近いものは 3.1.9 にはありそうですね（6 月 24 日，入谷)。
3.1.9 においては

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} X = [0]$$

となる X の幾何的性質ですね。解の集合が線形空間になることでしょう。つまり，X^1, X^2 が解であれば，α, β を任意の実数として，$\alpha X^1 + \beta X^2$ も解となるということです。今ひとつは，X のある列を $(x_1, x_2)^{\mathrm{t}}$ とすると，

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

となります。これは二つのベクトル $(1,3)^{\mathrm{t}}$ と $(3,9)^{\mathrm{t}}$ を何倍かして加えると原点に戻るそのような x_1, x_2 を求める問題となっています。$x_1 = x_2 = 0$ でもいいのはもちろんです。それだけでなく，$(1,3)^{\mathrm{t}}$ と $(3,9)^{\mathrm{t}}$ を平面上のベクトルと見ると，同じ方向を向いていることに気がつきます。すると，$x_1 \neq 0, x_2 \neq 0$ でも原点を表現できます。一方が正値なら他方は負値ですが，ある比率であればよさそうですね。
閑話休題：読み直していたら，脱線をしたくなりました。細部に興味のない読者は気にしないでください。問題を変えて，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

の解の集合はどうなるかを考えてみましょう。ここで，x は列ベクトルです。この方程式は非同次の連立方程式と呼ばれますが，式番号をつけて (1) とします。非同次というのは，右辺がゼロベクトルではない，ということです。二つの解 x, x' があったとすれば，

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} (x - x') = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

が満たされます。$x - x'$ を y と見てみますと，上の式は y の同次方程式になります。この式を (2) としましょう。(2) の解の集合は，これまでの話から，線形空間になります。そのどの要素も表現できるような (2) の解を同時方程式の一般解といいます。そこで，x' を (1) 一つの解（特殊解）とすれば，(1) のどのような解 x も (2) のある解 $y(= x - x')$ について，$x = y + x'$ となります。言い換えると，(1) の一般解は，(2) の一般解と (1) の特殊解の和で表現できることになります。

もとにもどって，次は **3.2.2** です。この問題での 行列式＝0 を x を与えると y をきめる関数と見るとき，それが直線となることからこの質問が出てきているのでしょうね。2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線を L とします。L 上の任意の点 (x, y) がこの行列式をゼロにし，逆に，この行列式をゼロにする任意の (x, y) は直線 L 上にあることを示せばよいのです。これは十分に幾何学的な問題ですが，行列式の性質から直接的に言えます。幾何的解釈はこれ以上にあるのでしょうか？

高羅さん，何か補足がありましたら，お願いします。

1.5　第 4 章 二変数関数の微分

第四章についての質問はこの下にどうぞ

○　**第十一回の講義**（6 月 28 日）には，二変数関数の微分に本格的に入っていきます。予習をされる方は教科書第 4 章の 1 節と 2 節を見てきて下さい（6 月 21 日，入谷）。

練習問題 6 月 28 日の講義への練習問題は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm からｐｄｆファイルをダウンロードできます（6 月 20 日，入谷)。

宿題の解答に対する指摘に対するコメント（6 月 29 日、高羅）昨日の TA セッションで、とある受講生の方から「$0 < h < 1$ のとき不等号の向きが逆転しないのか」という質問がありました。指数関数 $f(x) = a^x$ は $0 < a < 1$ のとき単調減少、$a > 1$ のとき単調増加であることに注意すれば、$0 < h < 1$ のときも不等号の向きが逆転することはありません。各自確認してみてください。質問してくれた人どうもありがとう。

reply to 宿題の解答に対する指摘に対するコメント（7 月 1 日、Yuji Matsuoka)
高羅さん、コメントを頂きましてありがとうございます。指数関数の a の部分の場合分けによって、考えられる点を見落としていました。復習します。ありがとうございました。

第十二回の講義（7 月 5 日）には，二変数関数のテーラー展開と同次関数を解説して，第 5 章 制約のない最大化問題に入ります。予習をされる方は教科書第 4 章の 2 節と第 5 章 1 節と 3 節を見てきて下さい（6 月 28 日，入谷)。

次回の課題
問題 **4.2.6(1)**、**4.2.7(5)**、**4.2.10(2)** および **4.3.1(2)** は各自解答したものを**次回提出**してください。前回は解答を先に配布したせいか、提出者は２人でした。今回は期末試験を受けようと考えている人はなるべく全員が提出するようにしてください。宿題のできが成績に反映されることはありません。ですので、分からないなら分かるところまで書いて出してくれれば構いません。こちらの意図としてはどれくらいできるのかをみたいだけです（7 月 7 日、高羅)。

練習問題 7 月 5 日の講義への練習問題は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm からｐｄｆファイルをダウンロードできます（7 月 7 日，入谷)。

TA セッション
19 日（土）は先生の講義はありませんが、皆さんに期末試験で良い点を取ってもらえるよう、いつもの教室でいつもの時間（11 時 10 分〜12 時 40 分、途中入退出自由）に TA セッションを実施します。質問のある人はぜひ利用してください（7 月 7 日、高羅）。

1.6 第 5 章 最大化問題

第五についての質問はこの下にどうぞ

第十三回の講義（7 月 12 日）には，第 5 章最大化問題に入ります。テーマは，最大化の必要条件，陰関数定理，ラグランジュ法です（7 月 6 日，入谷）。

解説陰関数定理の応用例として限界代替率を取り上げてみます。(7 月 14 日，入谷）

各財の消費の水準が決まっているものとします。このとき，**第 1 財の第 2 財に関する限界代替率** marginal rate of substitution とは，ほんの少し第 1 財をあきらめたとき，第 2 財をどれだけ増加させるともの と効用（満足）の水準に戻るかを表すもので，第 1 財の第 2 財に対する心理的な交換比率を表します。つまり，縦軸に第 2 財，横軸に第 1 財を測るときに，その消費の水準を表す座標を通る無差別曲線の接線の傾きに -1 をかけたものが第 1 財の第 2 財に関する限界代替率ということになります。

いま，効用関数を $u(x_1, x_2)$ と書き，連続微分可能とします。ある消費の水準 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ が正の水準で与えられているとします。このとき，$\partial u/\partial x_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > 0$ とします。このとき，

$$u(\bar{x}_1, x_2) = u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

は x_2 を未知数とする方程式と考えることができます。しかも，解は $\bar{x}_2$ です。加えて，解において，

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \neq 0$$

が成立しています。これは，方程式の解において，ヤコービ行列式がゼロでないことを意味しています。すると，陰関数定理を適用することができて，$\bar{x}_1$ の近傍 $B_\epsilon(\bar{x}_1)$ から $\mathbb{R}$ への連続微分可能な関数 $f(x_1), x_1 \in B_\epsilon(\bar{x}_1)$ が存在して，

$$u(x_1, f(x_1)) = u(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

は $x_1 \in B_\epsilon(\bar{x}_1)$ について恒等式となります。さらに，$f(\bar{x}_1) = \bar{x}_2$ も成立します。したがって，$u(x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ を満たす (x_1, x_2) は無差別曲線となっていますが，関数 $x_2 = f(x_1)$ は 無差別曲線を $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ の近傍 $B_\epsilon(\bar{x}_1)$ で陽表的に表したものになっています。従って，限界代替率は $-f'(\bar{x}_1)$ となります。したがって，合成関数の微分を用いて，

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) + \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) \times f'(\bar{x}_1) = 0$$

ですから，

$$-f'(\bar{x}_1) = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) / \frac{\partial u}{\partial x_2}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

のように得られることになります。このようにして，限界代替率は限界効用の比率で表現できるのです。

これに対して，通常なされる説明は次の通りです。比較対照してどう違うかを考えてみてください。

$u = u(x_1, x_2)$ を全微分すると，

$$\mathrm{d}u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2$$

となります。いま，左辺 $\mathrm{d}u = 0$ とおいて，$(x_1, x_2) = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ とすれば，

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2 \quad \Rightarrow \quad -\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) / \frac{\partial u}{\partial x_1}(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$$

となって，上と同じ限界代替率が得られます。

Q29. 定理 5.3 と定理 5.4 について（７月１８日、梅雨明け）
テキスト pp.158-162 の定理 5.3 と定理 5.4 は 2 変数関数の最大化問題の必要条件と十分条件です。そこでは開球 $B_\epsilon(a)$ を考えていますが、この a というのがよく理解できません。少し解説していただけないでしょうか。

A29. 単に，D の要素であるということです（7 月 18 日，入谷)。ある点 a が D の中にあって，さらに，$B_\epsilon(a) \subset D$ という要求をしています。これよりも重要なのは，最大化を達成する $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ も $B_\epsilon(a)$ の点だということです。点 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ のまわりに微分できるほど広がりがあることを要求しているわけです。たぶん，あなたは a と $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ が一致する方が楽しいと考えていてるのでしょうか。でもよく考えてみると，a と $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ が一致する必要はないのです。一致しなくても $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ を中心にして $B_\epsilon(a)$ の中に含まれる球近傍が取れますね。

Q30. 陰関数定理について（７月１８日、梅雨明け）
テキスト 192 ページの第二パラグラフに、
「陰関数定理 5.6 によって、価格と所得の組 (p_1, p_2, I) の近傍 $B_\epsilon(p_1, p_2, I)$ と連続的微分可能な関数

$$x_i : B_\epsilon(p_1, p_2, I) \to \mathbb{R}_+,\ i = 1, 2, \quad \lambda : B_\epsilon(p_1, p_2, I) \to \mathbb{R}$$

が存在して、」
とあります。陰関数定理（定理 5.6、pp.163-164）では、パラメータだけでなく解についても近傍を考えていますが、どうしてここではパラメータの近傍のみを考え、解については近傍を考えていないのでしょうか。

A30. あなたの疑問はもっともです（7 月 18 日，入谷)。
163 ページにある陰関数定理を正確に使うと，$(x_1, x_2, \lambda) : B_\epsilon(p_1, p_2, I) \to B_\delta(x_1^*, x_2^*, \lambda^*)$ と書くのが正しいのです。192 ページでは，財ごとに書きたいという意図がありました。$B_\delta(\cdot)$ をそれぞれの軸に射影してという作業をしても良かったのですが，それをやると面倒ですので，簡略化して，$x_i : B_\epsilon(p_1, p_2, I) \to \mathbb{R}_+$,

$i = 1, 2$ と書いています。前者が成立するなら，後者になることは明らかですからね。

Q31. 内点について（7月１８日、梅雨明け）
前回の授業の冒頭で、先生は
「$x \in D,\ D \subset \mathbb{R}^2$ が内点であるとは、ある正の数 $\epsilon > 0$ が存在して、$B_\epsilon(x) \subset D$ となることである」
と定義され、2,3 例を白板にお書きになりました。その一つ目の例で、D として数直線を書かれ、D 上のどの点も内点になりえないとおっしゃっていたように記憶しています。ノートをもう一度振り返ってみると、内点の定義では $D \subset \mathbb{R}^2$ なのに、どうして数直線 D を考えるのか、なんだかよくわからなくなりました。少し解説していただきたくよろしくお願いします。

A31. 梅雨明けですね。昨夜は雷が鳴っていました（7 月 18 日，入谷)。
$D \subset \mathbb{R}^2$ であっても，D のどの点も内点にならない場合があります。たとえば,

$$D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 = 0\}$$

である場合は，D は $\mathbb{R}^2$ の中の直線ですが，二次元の厚みはありませんね。

Q32. 『基礎からの経済学』練習問題　第 3 章（7 月 19 日，渡瀬富美)。
TA の高羅さんが作って下さった問題でいくつか質問と言いますか、解き方を教えて頂ければと思います。
今日の TA セッションで問題 3.1．7 の（1）の AA^t が対称行列になる証明は教えていただいたのですが、A^tA が対称行列なる証明を教えてください。
問題 3.2.4 の各問題について、どの行列式の性質を使うのかを教えて頂ければと思います。
問題 3.3．2 の $\det(\mathrm{a}djA) = (\det A)^{n-1}$ となる証明を教えてください。

たくさん質問をして、申し訳ありません。よろしくお願いします。

A32. 渡瀬さん，初めての質問ですね。歓迎します（7 月 20 日，入谷)。

最初のご質問ですが，$B = A^{\mathrm{t}}$ とおきますと，$B^{\mathrm{t}} = A^{\mathrm{tt}} = A$ になります。そして，$A^{\mathrm{t}}A = BB^{\mathrm{t}}$ ですから，行列に右からその転置行列をかけたものは対称になる（AA^{t} が対称行列である）ことを B に適用すればよいのです。

3.2.4 済みません，全部を書けば大変な量になりますので，全てに答えることは勘弁してください。**基本的方針は，教科書第３章 2.2 の行列式の諸性質（i)-(vi)（85 ページ）を繰り返して利用する**ことです。これらの諸性質は既知のものとして使っていただいて結構です。あるいは，行列式を 83 ページの図 3-1 に従って展開してもやれます。

3.2.4 (1) を工夫してやってみましょう。(1) は

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & {x_3}^2 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)$$

を示しなさいということですね。左辺の行列式の第 1 行に x_1 をかけたものを第 2 行から差し引いても行列式は変わりません。そのあと，第 1 行に ${x_1}^2$ をかけたものを第 3 行から差し引きます。すると，行列式の値は変わらず，

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & {x_2}^2 - {x_1}^2 & {x_3}^2 - {x_1}^2 \end{vmatrix}$$

となります。さらに，得られた行列式の第 2 行に $x_2 + x_1$ をかけて

第 3 行から差し引きますと,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 + x_1 - x_2 - x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ 0 & 0 & (x_3 - x_1)(x_3 - x_2) \end{vmatrix}$$

となります。あとは，判りますね。次のことを注意して欲しいのですが，上に示した方法は**ひとつの方法**であって，唯一無二のものではありません。格好良く見えるかも知れませんが，他の方法に比べて計算量が小さいとか言うわけではありません。実際に，最初から展開をして，それから高校生のときにやったように因数分解をするのも同じくらいの労力だろうと思います。

3.2.4 (4) を 2 通りでやってみましょう。(4) は

$$\begin{vmatrix} a_1 + x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 + x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 + x \end{vmatrix} = x^2(x + a_1 + a_2 + a_3)$$

を示しなさいということですね。

まず工夫した方法を考えてみます。左辺の行列式について，まず，第 1 行から，第 3 行を差し引き，さらに，第 2 行から第 3 行を差し引いてみます。行列式が変わらないのはいいですね。

$$\begin{vmatrix} x & 0 & -x \\ 0 & x & -x \\ a_1 & a_2 & a_3 + x \end{vmatrix}$$

となります。さらに，第 1 列を第 3 列に足し，その後，第 2 列を第 3 列に足しますと,

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ a_1 & a_2 & a_1 + a_2 + a_3 + x \end{vmatrix} = x^2(x + a_1 + a_2 + a_3)$$

となります。最後の等式は上半三角部分が全てゼロですから，対角線要素の積になって，成立します。
次に最も原始的にやってみましょう。

$$\begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2+x & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3+x \end{vmatrix}$$
$$= (a_1+x)(a_2+x)(a_3+x) + 2a_1a_2a_3 - (a_1+x)a_2a_3 - a_1(a_2+x)a_3 - a_1a_2(a_3+x)$$

はご存じですね。右辺を全て展開してというのはうんざりしますから，因数分解をしていきましょう。まず，右辺は

$$(a_1+x)(a_2a_3 + (a_2+a_3)x + x^2 - a_2a_3) + 2a_1a_2a_3 - a_1(a_2+x)a_3 - a_1a_2(a_3+x)$$

となります。これをにらむと，第一項の a_2a_3 が相殺されるのが判ります。また，第２，３，４項では $a_1a_2a_3$ が消えるのが判りますから，

$$(a_1+x)((a_2+a_3)+x)x - a_1xa_3 - a_1a_2x$$
$$= x(a_1(a_2+a_3) + (a_1+a_2+a_3)x + x^2 - a_1a_3 - a_1a_2)$$

となります。またこれをにらんでやりますと，右辺の括弧の中の a_1a_2 と a_1a_3 の項が消えるのが判りますので，上式は

$$x((a_1+a_2+a_3)x + x^2) = x^2(x+a_1+a_2+a_3)$$

となって証明完了です。
3.3.2 は次の通りです。
余因子行列と行列との積 $\mathrm{adj}A \cdot A$ は対角行列で，各対角要素は $\det A$ であることが判っています。ですから，

$$\det(\mathrm{adj}A \cdot A) = (\det A)^n$$

となります。ここで，n は正方行列のサイズ（ A が n 行 n 列）です。また二つのサイズの同じである正方行列の積の行列式は，それ

ぞれの正方行列の行列式の積であることが知られていますから，

$$\det(\mathrm{adj}A \cdot A) = \det(\mathrm{adj}A) \times (\det A)$$

となります。これから求める結果が示されます。
注意：3.3.2 に関する上の説明は $\det A \neq 0$ の場合について有効です。$\det A = 0$ の場合には違う論証が必要です。この時は，$\det(\mathrm{adj}A) = 0$ が成立することを示せばよいことに気づいてください。これを示すには，次のようにやります。
(i) A のすべての要素がゼロの場合はあきらか。
(ii) A の第 (i, j) 要素 a_{ij} がゼロでない場合を考えましょう。A の第 j 列を a^j と書きます。余因子展開より，$(\mathrm{adj}A)a^j = [0]$ となります。[0] はゼロベクトルです。adj$A$ の第 k 列を A^k と書けば，

$$[0] = (\mathrm{adj}A)a^j = a_{1j}A^1 + \cdots + a_{ij}A^i + \cdots + a_{nj}A^n$$

となります。ここでは，A は n 行 n 列として書いています。3 行 3 列でも同じです。どちらでも，adj$A$ の第 i 列 A^i は他の列を何倍かして合計したものとなります (このために，$a_{ij} \neq 0$ が必要になります)。したがって，行列式の性質から，$\det(\mathrm{adj}A) = 0 = (\det A)^{n-1}$ となります。この**注意**は 7 月 21 日に書かれました。
高羅さん，補足があればお願いします。
Q33. 練習問題　第 3 章（7 月 20 日，Yuji Matsuoka)。
久しぶりに質問をさせていただきます。よろしくお願いします。1 人で解いていると煮詰まってしまって。。。。。
問題 3.3.9 に関してですが、A に逆行列が存在して $AX = B$ と $YA = B$ にそれぞれ前と後ろから A^{-1} をかけると、求めるべき結果が出てくるわけです。そして、逆行列は存在すれば一意に決まっているので、X と Y もまた一意に決まるという流れで良いのでしょうか？？
お忙しいと思いますが、解答の方よろしくお願い申し上げます。
A33. Matsuoka 君，頑張ってますね（7 月 20 日，入谷)。
問題の半分は「正方行列 A の逆行列が存在するとする。B を適切

なサイズの行列とするとき，方程式 $AX = B$ の解 X は一意で，$A^{-1}B$ と一致することこと示しなさい」ですね。
回答例を作ってみましょう。X, X' を解とすれば，$AX = B$ かつ $AX' = B$。また，逆行列は一意であるから，$X = A^{-1}B = X'$ が成立する。よって解は一意である。
以上のような具合ですから，Matsuoka 君の答案で良いと思います。
A33-2. ありがとうございます。(7 月 21 日，Yuji Matsuoka)
入谷先生、早速の解答ありがとうございます。試験に向けてあと少し気を引き締めて頑張りたいと思います。
A32-2. ありがとうございました。(7 月 22 日，渡瀬)
入谷先生、丁寧に解答ありがとうございます。3．4.2 は先生の解答を参考に自分でも色々試してみようと思います。
Q34. 『基礎からの経済数学』 練習問題　第 4 章（7 月 22 日，渡瀬）。

『基礎からの経済数学』練習問題　第 4 章の問題 4.1．1 の（3）の f を R^2 上で定義された実数関数とする。f が $\bar{x}$=($\bar{x_1}$ $\bar{x_2}$) において偏微分可能であり、かつその偏動関数が $\bar{x}$ において微分可能であるならば、f は $\bar{x}$ において微分可能であることを示しなさい。
という問題を教えて頂いてもよろしいでしょうか？
質問ばかりで申し訳ありません。お忙しいと思いますが、よろしくお願いします。
A34. 渡瀬さん，第 4 章練習問題 解答が高羅さんから提供されています。ご利用下さい（7 月 22 日，入谷)。
A34-2. ありがとうございました。(7 月 25 日，渡瀬)
入谷先生、高羅さんありがとうございます。さっそく、解答を参考にしてみます。

練習問題解答 第 4 章練習問題への解答は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm からｐｄｆファイルをダウンロードできます（7 月 22 日，入谷)。

練習問題解答 第 3 章練習問題への解答は http://www.econ.kobe-u.ac.jp/ iritani/bme08.htm からｐｄｆファイルをダウンロードできます (7 月 28 日，入谷)。

お知らせ：期末試験は 7 月 26 日に行います。
教室は I-320，時間は 11:10〜12:40 です。
試験会場が変更されました。**I-320** です。
試験の範囲は，今期の講義のすべてです。
持ち込みは不可です　頑張ってください (6 月 30 日，入谷)。

1.7　講義について

今期の講義について，自由に書き込んでください（7 月 5 日，入谷)。

次回に私がこの科目を担当するときの参考にしますので，率直な意見をお願いします。お名前は必要ありません。足りない場合には数字を増やしていってください。

講義に対して不満に感じた点

1. ３章は行列を白板に書くこと自体に時間がとられてしまった気がします。結果として、３章は２回半と時間をかけた割に多くのことを学べなかった、４章以降が駆け足になっている気がします。３章は受講生にとって他の章に比べればとっつきやすいと思います。むしろ、３章は駆け足でもよかったのではないでしょうか。
2. 私も上のコメントを書かれた方と同じ意見です。多くの人にとって、３章の内容は比較的理解しやすいと思われるので、ここはもっと駆け足でも構わなかったように思われます。そもそも２単位科目で時間がかなり限られていて、先生も授業にはご苦労なされていたとは思いますが、個人的にはもっと教科書の最後のほうの内容について先生の詳しい講義を聞きたかったように思います。
3.

講義で興味を持った点

1. 先生が授業中にされた平均値定理をテーラー展開の形に変形するのは「何とあざやかだなあ」と思いました。それと、講義が終わって TA セッションが始まったときに先生はいつも教室を回って「どうですか」と、声をかけてくださいました。私としてはとても嬉しかった。

2.

3.

その他，感想など

1. 先生は何も見ずにニコニコとして授業をなさいます。聴いていると自分にもやれそうな気分になります。でも先生のニコニコはくせ者で、家に帰って宿題をしようとすると、何が何やら判らんのです。どうして先生は何も見ずに出来るのでしょう。4ヶ月弱の間有り難うございました。

2. ソーダ、ソーダ、上の意見に激しく賛成！そして、テストは難しくないものをお願いします。

3. 今まで数学的準備をしっかりしていなかった私にとっては、大学院レベルの経済学を理解する上で非常に有意義な講義でした。先生や高羅さんも質問に丁寧に答えてくださり、またこの質問掲示板も設けられるなど受講環境は非常に良かったと思います。半年間本当にありがとうございました。

4. すべての講義、試験が終わりましたので感想などを書きたいと思います。最初の講義時に先生が「真剣にやらないと授業にはついていけない」旨の話をされましたが、「真剣にやるには相当の勉強時間が必要」ということを感じます。個人の能力や経歴にもよるとは思いますが、私の場合そこまでの勉強時間をとることはできませんでした。そこでちょっとした提案ですが、練習問題の出し方を変えることはできないでしょうか。講義に出席している者にとってその日の授業内容が理解できるかどうかは極めて重要な点です。自身で

の復習は当然ですが、授業内容だけの理解を確実にする練習問題とその解答を授業終了時点で頂けたら自身で復習する内容を格段に充実させることができます。次回講義時に質問するくらい理解できるかも知れません。(数学に不慣れな者には授業中にとったノートを復習したり教科書を読む程度では肝心な点を見落としても気が付きませんし、最適な問題を探し出すことにも困難がつきまといます)。もし、このようなことにより授業内容だけが確実に理解できれば、教科書を丹念に読み理解し、出された宿題、練習問題を解き、一層理解を深めていくという次のレベルにもよりスムーズ入れるし、その理解速度が上がることにより全体の勉強時間も少なくなるように思えます。今は前段の部分と後段の部分が一緒で、不慣れな者にとって勉強の焦点が混乱することにより時間がかかっているように思えます。長くなりましたので終わりますが、先生の講義を聞くのは楽しい時間でした。まだまだですが自分では数学のレベルも少し上がったように思います。数学の勉強は続けていきたいと思っています。

5. 半期間の基礎経済数学の講義が終了しましたので、感想等を書かせていただけたらと思います。まず、半期間という短い期間ですがお世話になりました、入谷先生、TA の高羅さん、本当にありがとうございました。先生の講義は非常に丁寧な説明で、一見取っ付きにくそうな数学的な概念もスムーズに受け入れることができました。今回の私の感想は、講義そのものというよりも講義に付随する周辺環境についての提案という形で書かせていただけたらと思います。まずは、演習時間の確保です。理系では講義＋演習という形で、ペアになって授業が提供されていることが多いです。基礎経済数学でも2時間のペア科目として演習もセットで開講されるということは無理なのでしょうか？やはり、経済学で分析を行う上で、数学はツールです。いかにして、教わった数学的概念を適用するのかという実地訓練のようなものがあればと思いました。続いて、TA セッションについてです。これは今後とも続けていっていただけたらと思います。特に証明問題での解法の仕方の説明は非常に分かり

やすく、勉強になりました。常に定義に戻る姿勢など、多くのことを学ばせていただきました。一点改善点をお願いするならば、字の大きさをもう少し大きくしていただければありがたかったです。また、高羅さんが作って下さっている練習問題も非常に勉強になりました。少し問題が多くて大変だったなぁという印象はあります。練習問題の答案や中間試験などのやり直しなど、多くの時間を割いて添削して下さったのもありがたかったです。やはり、証明問題などは独りよがりな解答になっていることも多く、専門的な知識を持った第３者に添削をしていただくことが習得することへのベストなルートだと思います。そういった点も、今後も続けていっていただけたらと思います。あとは、こうした練習問題のほかにも、毎回の宿題も出していただけたらよかったかなと思います。その日の単元の基本的な問題の確認といった位置づけのものです。練習問題はその上のステップという感じです。やはり数学というのは積み重ねが重要な科目であると思うので、こうした宿題などでの基礎確認は重要かと思います。以上が私が今回の基礎経済数学を受講しての今後の講義への提案です。こうした提案を生意気にも書いてしまいましたが、今回の講義は、すでに非常に恵まれた環境の中で経済数学を学ばさせていただけたと思います、そういった恵まれた環境の中で重要になってくるのが生徒の自主性や意識だと思います。手を挙げて質問をしたり、質問掲示板に書き込みをしたり、直接質問に行ったり、こういった能動的な姿勢が学生側にも必要ではないかと、この文章を書きながら自戒の意味をこめて考えています。今回、基礎経済数学の講義を受講できて非常に良かったです。今後の研究では数学を多用することになってくるので、今回を良い機会に、さらに深くまで学んでいきたいと思います。本当にありがとうございました。(Yuji Matsuoka 7 月 28 日)

追伸：復習のためにも、第３章の解答及び第５、６章の問題解答をアップしていただけると幸いです。お忙しいと思いますがよろしくお願い申し上げます。

6. 数学は忘却の彼方にあった私にとって、入谷先生の講義は本当

に本当に役立ちました。ダメ生徒なもので、まだまだ身についてはいませんが・・・　入谷先生があまりにもスラスラと何も見ずに講義されるのを見ていると、なんだか簡単そうに思えてくるほどでした。　高羅さんも、練習問題・試験及びその採点等々、本当にありがとうございました。丁寧な解説、親切な解答案等、本当に手間がかかったかと推測します。本当にありがとうございました。これでこの授業が終わりかと思うと、残念無念です・・・・私にとっては、どの講義よりも全ての点で良かったと思います。もっと受講したいですね・・・（F　7 月 29 日）

7. そして、この掲示板は今しばらく（できればずっと・・）閉鎖しないで存続していただければ幸いです。入谷先生、高羅さんのあれほど的確な返答がある掲示板は、院生にとって本当に貴重です。経済数学に立ち向かいたいと願う院生ならば、誰もが望む場所だと思います。（F　7 月 29 日）

8. 長々と書いてすいません。もう一言だけよろしいでしょうか。

上で matsuoka さんは練習問題についておっしゃっておられますが、私も毎回宿題ありというのは賛成です。怠惰な自分を追い込むきっかけになりますので（笑　あと、お手間とは思いますが、もう少し小テスト等を織り交ぜていただけたらと思います。たとえば各章が終了する毎にその章に内容を限定し、翌週 30 分程度で実施すれば、勉強のきっかけにもなりますし、コツコツした努力が報われそうです。（F　7 月 29 日）