

上級財政学

－ 公共財の理論 －

2004 年 前期 月曜 2 限

神戸大学，経済学部・大学院

Prepared by 入谷 純

はじめに

財政学は政府の経済活動が如何なる影響を経済に及ぼすか、を研究する分野である。中でも、租税の理論が財政学の中心であった。そのために、古くから財政学者は、制度が従うべきルール（租税（課税）原則）という光のもので熱心に税制度を考察したのである。これらの議論では、租税は「何ら反対給付なく民間の購買力を公的部門に移すこと」を意味し、そのような強制力が政府に付与されていると考えられてきた。

現在の財政学では「強制力を伴う租税」という観念は必ずしも主たる考え方ではない。つまり、国の活動の主たるものは公共財の提供であり、公共財のベネフィットにたいする対価として国民が負担をするものが租税であるとする「公共財の反対給付としての租税」が財政理論に大きな地歩を築くに至っているのである。これはいわば、「制度論としての租税理論」から「ミクロ経済学モデルを用いた租税理論」への転換を意味している。

この転換によって財政学は経済モデルを用いるという変貌をとげた。その転換において、公共財の理論の果たした役割は大きい。2004年度の上級財政学は、公共財について学ぶことを目的としている。公共財の効率性に関する議論（第一章）、様々な均衡概念（第二章）、そして、メカニズムデザインによる接近（第三章）を紹介することが目標である。しかしながら、半期週一コマの講義ですべてを紹介できるかは甚だ心許ない。事実、第三章には全く立ち入れなかった。それでも講義で扱った範囲は広い。講義だけでは理解できなかったことも多く残されているであろう。そのため、自習にも用いることのできるようにこの講義ノートを準備した。

諸君の財政学研究に実りの多いことを祈る。

本講義ノートの一部あるいは全部の無断転用転載を禁止する。

2004年7月12日 入谷 純

目次

第 1 章	公共財の存在する経済の効率性	1
1.1	公共財の定義	1
1.2	競争均衡とパレート効率性	3
1.3	公共財の効率性	6
1.3.1	サミュエルソン条件	8
1.3.2	一般的な方法による表現	14
1.3.3	社会的厚生との関連	22
1.4	数学付録	33
1.4.1	(1.3) と (1.12) の解の存在	33
1.4.2	最大化問題, ラグランジュ法そして制約想定	35
第 2 章	様々な均衡概念	39
2.1	リンダール均衡	40
2.2	公共的競争均衡	44
2.3	私的供給	48
2.3.1	基本モデル	49
2.3.2	中立性	51

第1章 公共財の存在する経済の効率性

1.1 公共財の定義

通常の財は競合的 rivalry であり、同時に排他的 excludable であると言われる。競合的であるとは、ある人の消費が他の人の消費の利用可能性を制限するということであり、排他的であるとは、対価を負担しないものの利用を妨げることができるということである。公共財はそのような性質を有しない、と想定される。つまり、非競合性 non-rivalryness と同時に非排除性 non-excludability を有すると定義される (Musgrave (1969), Stiglitz (1985))¹。

以下は MasColell, Whinston and Green (1995), そして Oakland (1995) による定義と解説の一部である。

- (1) A public good is a commodity for which use of a unit of the good by one agent does not preclude its use by other agents. Put somewhat differently, public goods possess the feature that they are nondepletable (MasColell, Whinston and Green (1995))².
- (2) A distinctive characteristic of public goods is that they are not “used up” in the process of being consumed or utilized as an input in a production process. ...中略... A further source of difficulty

¹Musgrave, R.A., (1959) *The Theory of Public finance*, MacGRAW-HILL. Stiglitz, J.E., (1988) *Economics of Public Sector*, Second Edition, W.W. Norton & Company.

²MasColell A., M.D. Whinston and J.R. Green (1995) *MicroEconomic Theory*, Oxford University Press.

is encountered if the public good has the property that potential users cannot be costlessly excluded from its services. ...中略... As Musgrave(1969) has aptly stated, public goods involve no “rivalry-ness” among consumers while private goods involve perfect “rivalry-ness”.(Oakland (1987))³

これらの原初的な概念から具体的で取扱いの容易な定義が与えられている。ここでは、Oakland (1987) に従って、定義することにしよう。 n 人経済を想定する。ある財を取り上げて、その供給量（あるいは生産量）を y 、各個人の需要量（あるいは利用量）を $x^i, i = 1, 2, \dots, n$ とする。この時、当該の財が純粋に私的財 purely private good である、そして、純粋に公共財である purely public good であるとは、それぞれ

$$\text{純粋に私的財であること：} \quad \sum_{i=1}^n x^i \leq y \quad (1.1)$$

$$\text{純粋に公共財であること：} \quad x^i \leq y, \text{ for all } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.2)$$

と表現されている。さらに、Oakland (1987) はこれらがそれぞれ Musgrave (1969) における競合性と非競合性に対応していると指摘している⁴。

(1.2) で表現される非競合性が非排除性とともに見れると、どの人の消費量も同一であること、すなわち、等量消費 equal consumption という現象が出現する。実際、いま、ある財があつて

(i) 非競合性と非排除性を有し、

³Oakland, W.H., (1987) “Theory of Public Goods,” in *Handbook of Public Economics*, Vol.2 (Eds. Auerbach A. J., and M. Feldstein), 485-535.

⁴これらを競合性、非競合性の定義と考えることには、多少の難点が残されている。第一に、競合性の定義が feasibility と何ら変わらない点がある。これは「財そのものの性質」から競合性が定義されているのではなく、複数の家計の消費量と供給量の関係において定義されている。これは定義に対する適切性について疑問を感じさせる。第二に、非競合性が競合性の否定であるにもかかわらず、表現されているものは論理的な否定命題となっていないという点がある。次に、これらを Oakland の言うように purely private good と purely public good の定義であると理解するとしても、 $x_i \leq y/n$ の場合は純粋に私的財であり、同時に純粋に公共財であることになる。これは用語上の矛盾であろう。また、財の性質が feasibility と関わっていることも気に入らない。おそらく、正しい理解の仕方は、各個人が (x^1, \dots, x^n) だけ利用するとき、利用総量は、私的財なら $\sum_{i=1}^n x^i$ となり、公共財ならば、 $\max\{x^1, \dots, x^n\}$ となるということであろう。これらは公共財の定義においてまだ未解決の部分があることを意味している。

- (ii) その財の消費が飽和しない、つまり、消費量を増やせば各人の効用が厳密に増加する、

と仮定してみよう。仮定 (1.2) によって任意の第 i 家計の消費量は $x^i \leq y$ となる。一方、非排除性によって彼はゼロの支出で y まで消費を増加することができる。したがって彼は $x^i = y$ という選択をする。これは任意の家計について成立するから、等量消費 equal consumption が成立することになる。

(純粋) 公共財では等量消費の状況を出現させる。

このような性質を持つ公共財では、フリーライダー(ただ乗り)が常に存在しうる。すなわち、家計は自ら進んで公共財を購入する必要はなく、誰かほかの家計が購入するのを待てばよい。そのために公共財の供給量の決定を市場における取引に任せるならば過小にしか供給されないであろう。

本章の目的は、公共財の存在する経済におけるパレート効率性を考察することであるが、まず最初に、公共財のない経済のパレート効率性の定義を与え、そして厚生経済学の基本定理を確立しておこう。

1.2 競争均衡とパレート効率性

市場が理想的に機能する一つの標準的モデルを紹介し、パレート効率性と市場との関係を考察する。ここでは公共財が存在しないものとする。 n 人の家計と 1 生産者が存在する経済を想定する。財の種類を ℓ 種類とする。家計 i の選考場 preference field を X_i で表し、 $X_i = \mathbb{R}_+^\ell$ とする⁵。各家計は効用関数 u_i を持ち、

$$u_i : x^i \in X_i \mapsto u_i(x^i) \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

とする。また、 $x^i \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^i, \dots, x_\ell^i)$ である。各家計には初期保有 $\omega^i \in \mathbb{R}_+^\ell$ が与えられているとする。さらに、 $\theta^i (\geq 0)$ は生産から得られる利潤 π に

⁵記号 \mathbb{R}_+^ℓ は ℓ 次元実数空間の非負の象限を表す。つまり、 $\{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \mid x_i \geq 0, i = 1, \dots, \ell\}$ である。同様に、 $\mathbb{R}_{++}^\ell = \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \mid x_i > 0, i = 1, \dots, \ell\}$ $\mathbb{R}_-^\ell = \{(x_1, \dots, x_\ell) \in \mathbb{R}^\ell \mid x_i \leq 0, i = 1, \dots, \ell\}$ である。

たいする家計 i の受け取り比率を表し, $\theta^i \pi$ は家計 i が受け取る配当である。さらに, $\sum_{i=1}^n \theta^i = 1$ であることは言うまでもない。

生産可能集合を $Y \subset \mathbb{R}^\ell$ で表す。特に $0 \in Y$ という性質を満たすものとする。この性質は生産者が何も生産をしないことを選択できることを意味しており possibility of inaction と呼ばれる⁶。 $y \in Y$, $y = (y_1, \dots, y_\ell)$ において, $y_j < 0$ であれば投入を $y_j > 0$ であれば産出を表すと約束する。

組 $(x^1, \dots, x^n, y) \in (\prod_{i=1}^n X_i) \times Y$ を資源配分あるいは単に配分 allocation と呼ぶ。配分 (x^1, \dots, x^n, y) が実行可能 feasible であるとは

$$\sum_{i=1}^n x^i \leq y + \sum_{i=1}^n \omega^i$$

であることをいう。実行可能な資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的 Pareto efficient であるとは

(x^1, \dots, x^n, y) を任意の実行可能な資源配分とするとき, ある家計 i について $u_i(x^i) > u_i(x^{i*})$ であれば別の家計 h が存在して $u_h(x^{h*}) > u_h(x^h)$ が成立する

ことである。

問題 1.1 実行可能な配分 (x^1, \dots, x^n, y) がパレート効率的でないことはどのようなことか述べなさい。

定義 1.1 次の3条件 (a), (b), (c) を満たす価格と配分の組 $(p^*, (x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*))$ を競争均衡 competitive equilibrium と呼ぶ。

- (a) y^* は問題: $\max p^* y$ subject to $y \in Y$ の解である。 $\pi \stackrel{\text{def}}{=} p^* y^*$ とする。
- (b) x^{i*} は問題: $\max u_i(x^i)$ subject to $p^* x^i \leq p^* \omega^i + \theta^i \pi$ の解である, $i = 1, 2, \dots, n$ 。

⁶possibility of inaction に加えて, 生産可能集合 Y には通常次の仮定がおかれるのが通常である。[凸閉性] 集合 Y は凸 convex かつ閉集合 closed set である。[桃源郷の否定] $Y \cap \mathbb{R}_{++}^\ell = \emptyset$ 。[free disposal] $\mathbb{R}_- \subset Y$ 。この節ではこれらは必ずしも必要としないので, これ以上の説明をしない。

(c) 市場均衡条件: $\sum_{i=1}^n x^{i*} \leq y^* + \sum_{i=1}^n \omega^i$ が成立する。

新たな用語を導入する。家計 i が局所非飽和性 local non-satiation を有するとは、任意の正の数 ε 、任意の $x^i \in X_i$ に対して、

$$\exists x^{i'} \in \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \|x^i - x\| < \varepsilon\} \cap X_i \text{ such that } u_i(x^{i'}) > u_i(x^i)$$

が成立することである。

補助定理 1.1 第 i 家計が局所非飽和性を有するとする。 I を非負の所得、 $p = (p_1, \dots, p_\ell)$ を非負の価格とする。第 i 家計の選択問題

$$\max u_i(x^i) \text{ subject to } px^i \leq I$$

が解 x^{i*} を持つならば、 $px^{i*} = I$ が成立する。

証明 略 †

定理 1.1 [厚生経済学の第一基本定理] 各家計が局所非飽和の性質を満たすとする。競争均衡 $(p^*, (x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*))$, $p^* \geq 0$ のもたらす配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はパレート効率的である。

† $px^{i*} < I$ が成立するならば局所非飽和性の仮定に矛盾することから、この補助定理の成立は明らかである。各自、特に、価格がゼロの場合の可能性を考慮して丁寧な証明を試みよ。

証明 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的でないとは仮定する (背理法の仮定)。実行可能な別の配分 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ が存在して

$$u_i(\tilde{x}^i) \geq u_i(x^{i*}), \quad i = 1, 2, \dots, n \text{ かつ}$$

$$u_j(\tilde{x}^j) > u_j(x^{j*}), \quad \text{for some } j$$

を満たす。ここで、 $\tilde{x}^i \in X_i, i = 1, 2, \dots, n$ かつ $\tilde{y} \in Y$ は明らかである。いま、ある家計 i について $p^* \tilde{x}^i < p^* x^{i*}$ が成立したと仮定してみる (背理法の仮定)。十分小さな正の数 $\tilde{\varepsilon}$ を選ぶと、 $p^* \tilde{x} < p^* x^{i*}$ が任意の $\tilde{x} \in \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \|x^i - x\| < \tilde{\varepsilon}\} \cap X_i$ について成立する。局所非飽和性によって、ある $z \in \{x \in \mathbb{R}^\ell \mid \|x^i - x\| < \tilde{\varepsilon}\} \cap X_i$ が存在して $u_i(z) > u_i(\tilde{x}^i) \geq u_i(x^{i*})$ となる。これは矛盾である。よって

$$p^* \tilde{x}^i \geq p^* x^{i*}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

である。さらに、

$$p^* \tilde{x}^j > p^* x^{j*}$$

は自明である。以上によって、 $\sum_{i=1}^n p^* \tilde{x}^i > \sum_{i=1}^n p^* x^{i*}$ が得られる。また、家計 i の競争均衡における所得は $p^* \omega^i + \theta^i \pi$ である。 $p^* \omega^i \geq 0$ かつ $\pi = p^* y^* \geq 0$ であるから、彼の所得は非負値である。よって補助定理 1.1 を適用できて

$$\sum_{i=1}^n p^* x^{i*} = \sum_{i=1}^n (p^* \omega^i + \theta^i \pi) = \sum_{i=1}^n p^* \omega^i + p^* y^*$$

が得られる。ここで、配分 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ は実行可能であるから、 $\sum_{i=1}^n \tilde{x}^i \leq \sum_{i=1}^n \omega^i + \tilde{y}$ である。したがって、

$$\sum_{i=1}^n p^* \omega^i + p^* \tilde{y} \geq \sum_{i=1}^n p^* \tilde{x}^i$$

である。これによって、 $p^* \tilde{y} > p^* y^*$ に至る。これは競争均衡の条件 (a) に矛盾している。したがって、配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はパレート効率的である。■

1.3 公共財の効率性

この節では、公共財の存在する経済でのパレート効率性を三通り考察する。最初のものは直感に訴える方法で微分を用いるものであり、第二のものは一般的な方法によるものである。最後はパレート効率性を個人主義的な社会的厚生関数との関連で考察する。パレート効率性を前節に定義したが、そこには公共財が含まれていなかったため、公共財を含むように記号法を改めよう。

選好場 X_i および生産可能集合 Y は公共財を含むように拡張され、

$$x^i \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^i, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}^i) \in X_i = \mathbb{R}_+^{\ell+1}$$

$$y \stackrel{\text{def}}{=} (y_1, \dots, y_\ell, y_{\ell+1}) \in Y \subset \mathbb{R}^{\ell+1}$$

とする。ここで、 $x_{\ell+1}^i$ と $y_{\ell+1}$ は公共財の水準を表す。さらに、初期保有 ω^i も公共財を含むように拡張され、公共財の初期保有はゼロ、 $\omega_{\ell+1}^i = 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ とする。複数の公共財は全く同一に取り扱えるので、ここでは1種類とする。

効用関数と生産可能性について次の仮定をおく。

仮定 1.1 効用関数は次の仮定を満たす。

(QC) u_i は連続な準凹 quasi concave である。

(M) u_i は $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ で厳密に増加的であり、 $\mathbb{R}_+^{\ell+1}$ で非減少的である。

仮定 1.2 生産可能集合 Y は次の仮定を満たす。

[凸閉性] 集合 Y は凸 convex かつ閉集合 closed set である。

[桃源郷の否定] $Y \cap \mathbb{R}_+^{\ell+1} = \emptyset$.

[possibility of inaction] $Y \cap \mathbb{R}_+^{\ell+1} = \{0\}$.

[free disposal] $\mathbb{R}_-^{\ell+1} \subset Y$.

[every good is producible] $(Y + \{\sum_{i=1}^n \omega^i\}) \cap \mathbb{R}_+^{\ell+1} \neq \emptyset$.

組 $(x^1, \dots, x^n, y) \in (\prod_{i=1}^n X_i) \times Y$ を資源配分あるいは単に配分 allocation と呼ぶ。配分 (x^1, \dots, x^n, y) が実行可能 feasible であるとは

$$x_{\ell+1}^i \leq y_{\ell+1}, i = 1, 2, \dots, n \quad \sum_{i=1}^n x_j^i \leq y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, j = 1, 2, \dots, \ell$$

であることをいう。

定義 1.2 実行可能な資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的 Pareto efficient であるとは

(x^1, \dots, x^n, y) を任意の実行可能な資源配分とするとき、ある家計 i について $u_i(x^i) > u_i(x^{i*})$ であれば別の家計 h が存在して $u_h(x^{h*}) > u_h(x^h)$ が成立する

ことである。

1.3.1 サミュエルソン条件

前に仮定したことに加えて、微分可能性を追加的に仮定する。すなわち、 u_i は $\mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ で微分可能であるとする。また、生産可能性集合はある微分可能な実数値関数 f が $\mathbb{R}^{\ell+1}$ 上に存在して、

$$Y = \{y \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid f(y) \leq 0\}$$

$$\partial Y = \{y \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid f(y) = 0\}$$

† 点 y が集合 Y の境界に属するとは、任意の正の数 ε について、 $B_\varepsilon(y) \stackrel{\text{def}}{=} \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid \|\tilde{y} - y\| < \varepsilon\}$ とするとき、 $Y \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ かつ $(\mathbb{R}^{\ell+1} \setminus Y) \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ が成立することである。

と表現できる。ここで、 ∂Y は Y の境界 boundary である†。 $f(0) = 0$ であることは容易に確かめられる。 f を微分可能とし、 $\partial f / \partial y_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, \ell + 1$ であると仮定する。 $f(y) \leq 0$ (不等号の向きに着目) によって Y に関連づけたのは微分を正值としたいためである。ここで、 $\ell + 1$ 番目の財は公共財である。 $f(y) = 0$ を満たす y を生産効率的 production efficient であるという。

問題 1.2 次の問に答えなさい。

1. 通常のコブダグラス生産関数を上で導入した陰関数の形の生産技術で表現してみなさい。
2. 関数 $f: \mathbb{R}^{\ell+1} \rightarrow R$ を集合 Y から構成しなさい。
3. 微分の比率 $(\partial f / \partial y_{\ell+1}) / (\partial f / \partial y_1)$ は公共財の第1財に関する限界変換率(あるいは限界変形率)であることを確かめなさい。もちろん分母にある微係数はゼロではないと仮定する。

ここで、 $(\bar{u}_2, \dots, \bar{u}_n)$ を与えられた定数とし、 (x^1, \dots, x^n, y) を選択変数として、次の問題を考察する。

$$\max u_1(x^1) \text{ subject to } u_i(x^i) \geq \bar{u}_i \text{ for } i = 2, \dots, n,$$

$$\sum_{i=1}^n x_j^i \leq y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, \dots, \ell \quad (1.3)$$

$$x_{\ell+1}^i \leq y_{\ell+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\text{and } f(y) \leq 0$$

この問題は、第1家計をのぞいて、他の家計の効用の水準を $\bar{u}_j, j = 2, \dots, n$ 以上であることを保証しておいて、実行可能な資源配分のうちで、第1家計の効用を最大化しようとするものである。問題 (1.3) には考察すべき問題が二種類ある。一つは解の存在であり、いま一つは解が満たすべき性質、つまり、必要条件を求めることである。解の存在については、制約条件を満たす配分の集合が非空であることと実行可能な配分の集合がコンパクトであることを示せばよい。これを数学付録に載せておいたので興味のある読者はそれを参照できる。第二の問題がこのサブセクションの中心的課題である。ここでは、(1.3) の内点解が存在すると仮定する。解 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が内点解であるとは、微分可能性と関わっていて、各変数が関数の定義域の内点にあること、つまり、 $x^{i*} \in X_i^\circ \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{R}_{++}^{\ell+1}, i = 1, 2, \dots, n$ であることと $y^* \in \mathbb{R}^{\ell+1}$ となることである。

まず、次の補助定理を示しておこう。

補助定理 1.2 問題 (1.3) に内点解 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が存在するとき、配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ は仮定 1.1, 1.2 のもとでパレート効率的であり、4つの制約は等号で成立する。

[証明] 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的でないとは仮定してみよう (背理法の仮定)。ある実行可能な配分 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ が存在して、

$$\begin{aligned} u_i(\tilde{x}^i) &\geq u_i(x^{i*}), \quad i = 1, 2, \dots, n \\ u_j(\tilde{x}^j) &> u_j(x^{j*}), \quad \text{for some } j \end{aligned}$$

が成立する。いま $j = 1$ が成立するならば、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が問題 (1.3) の解であることに矛盾する。したがって、 $j \neq 1$ の場合が問題である。次の関数を定義する。つまり、実数値関数

$$h(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} u_j(\lambda \tilde{x}^j), \quad 0 \leq \lambda \leq 1$$

を定義する。内点解の仮定より、 $h(1) > u_j(x^{j*}) > h(0)$ である。中間値の定理によって、ある $\tilde{\lambda}, 0 < \tilde{\lambda} < 1$ が存在して、 $h(\tilde{\lambda}) = u_j(x^{j*})$ が成立する。よって、 $\Delta x^j \stackrel{\text{def}}{=} (1 - \tilde{\lambda})\tilde{x}^j$ とすれば、 $\Delta x^j \gg 0$ であり、配分

$$(\tilde{x}^1 + \Delta x^j, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^j - \Delta x^j, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$$

は実行可能であり、同時に $u_1(\hat{x}^1 + \Delta x^j) > u_1(\hat{x}^1) \geq u_1(x^{1*})$ となる。これは矛盾である。よって、配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はパレート効率的でなければならない。

補助定理の後半部分は第 j 家計から第 1 家計に消費ベクトルの一部を移した直前の手続きと同様なものを考慮すると示すことができる。すべてを示す必要はないであろうから、(1.3) の最後の生産の条件についてだけ考察しておこう。この制約条件が厳密な不等号で成立した、つまり、

$$f(y^*) < 0$$

と仮定してみる。関数 $f(\cdot)$ が微分可能であるから、連続である。1 をあらゆる成分が 1 の $\ell + 1$ 次元ベクトルだとすれば、ある正の数 $\varepsilon > 0$ が存在して、 $f(y^* + \varepsilon \mathbf{1}) \geq 0$ とすることができる。したがって、配分

$$(x^{1*} + \varepsilon \mathbf{1}, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^* + \varepsilon \mathbf{1})$$

は実行可能で、同時に $u_1(x^{1*} + \varepsilon \mathbf{1}) > u_1(x^{1*})$ を成立させる。これは矛盾である。■

問題 (1.3) の解を $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ とし、 f に関する微分に関して正値性、 $\partial f / \partial y_j(y^*) > 0$, $j = 1, 2, \dots, \ell + 1$ を仮定する。問題 (1.3) が内点解を持つときのラグランジュの必要条件を求めてみよう。ラグランジュ関数を

$$\begin{aligned} L = & u_1(x^1) + \sum_{i=2}^n \lambda_i (u_i(x^i) - \bar{u}_i) + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j \left(y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i - \sum_{i=1}^n x_j^i \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \tau_i (y_{\ell+1} - x_{\ell+1}^i) - \eta f(y) \end{aligned}$$

とする。問題 (1.3) の解が $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ となる必要条件是、内点解を仮定すれば、連立方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j^i} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial y_j} &= 0, j = 1, 2, \dots, \ell + 1, i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_j} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \tau_i} &= 0, j = 2, \dots, \ell + 1, i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial L}{\partial \mu} &= 0, & \frac{\partial L}{\partial \eta} &= 0 \end{aligned}$$

を、ある $\lambda_i, \mu_j, \tau_i, \eta$ とともに $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が満たすことである[†]。上の必要条件は

[†] これらが解の必要条件になるには制約想定 constraint qualification を満たす必要がある。それらについてはこの章の数学付録を参照せよ。

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_j^1} - \mu_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_{\ell+1}^1} - \tau_1 = 0, \quad (1.5)$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j^i} - \mu_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, i = 2, 3, \dots, n \quad (1.6)$$

$$\lambda_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i} - \tau_i = 0, \quad i = 2, 3, \dots, n \quad (1.7)$$

$$\mu_j - \eta \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, \quad (1.8)$$

$$\sum_{i=1}^n \tau_i - \eta \frac{\partial f}{\partial y_{\ell+1}} = 0 \quad (1.9)$$

$$u_i(x^{i*}) = \bar{u}_i, \quad i = 2, 3, \dots, n,$$

$$y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_j^i = \sum_{i=1}^n x_j^{i*}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$y_{\ell+1}^* - x_{\ell+1}^{i*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

$$f(y^*) = 0$$

である。上の番号の付けられていない4つの条件は、最大化問題 (1.3) の制約条件が等号で成立することを意味している。

いま、解 x^{i*} における限界効用が正值であると仮定する。(1.4)–(1.9) より $\lambda_2, \dots, \lambda_n, \mu_1, \dots, \mu_n, \tau_1, \dots, \tau_n, \eta$ はすべて正值である。私的財について、(1.4), (1.6) と (1.8) を考慮すると、

$$\frac{\partial u_i / \partial x_j^i}{\partial x_1^i} = \frac{\mu_j}{\mu_1} = \frac{\partial f / \partial y_j}{\partial f / \partial y_1}, \quad j = 2, 3, \dots, \ell, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が得られる。これは第 j 財の第 1 財に対する限界代替率と限界変換率が各家計に関して等しいことを意味している。これは私的所有経済 private ownership economy の競争均衡モデルにおいて、家計や生産者が価格受容者 price taker である時に成立する条件である。

次に、公共財の条件についてみてみよう。(1.5), (1.7) と (1.9) によって、

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i} / \frac{\partial u_i}{\partial x_1^i} = \sum_{i=1}^n \frac{\tau_i}{\mu_1} = \frac{\partial f}{\partial y_{\ell+1}} / \frac{\partial f}{\partial y_1}$$

に至る。いま、第 i 家計の公共財の第 1 財に対する限界代替率を MRS^i 、公共財の第 1 財に対する限界変換率を MRT と書けば上の等式は

$$\sum_{i=1}^n MRS^i = MRT \quad (1.10)$$

が成立する。これは サミュエルソン条件 Samuelson Condition と呼ばれる公共財の効率的供給を記述するものである。私的財について成立する条件とは極めて異なる形となっていることに注目しておこう。

限界変換率を別の用語で置き換えることを考えてみよう。仮に、公共財の生産関数が $y_{\ell+1} = g(z_1, \dots, z_\ell)$, $y_{\ell+1} \geq 0$, $(z_1, \dots, z_\ell) \in \mathbb{R}_+^\ell$ と陽表的に書かれたとする。この節での陰関数による生産技術 f と g の関係は

$$f(y_1, \dots, y_\ell, y_{\ell+1}) = y_{\ell+1} - g(-y_1, \dots, -y_\ell)$$

ということである。したがって、

$$\frac{\partial f}{\partial y_{\ell+1}} / \frac{\partial f}{\partial y_1} = 1 / \frac{\partial g}{\partial z_1}$$

ということである。より生産技術を限定して、 $y_{\ell+1} = g(z_1)$ のように一種類の要素で公共財が生産される状況を想定するとする。逆関数を利用して、 $z_1 = g^{-1}(y_{\ell+1})$ と表現する。さらに、要素価格を 1 とすれば、 $1 \times g^{-1}(y_{\ell+1})$ は費用関数となる。したがって、 $1/g'(y_{\ell+1})$ は限界費用 MC に他ならない。このような観点から、(1.10) は、様々な教科書において、

$$\sum_{i=1}^n \text{MRS}^i = \text{MC} \quad (1.11)$$

と表現される。

このサブセクションでは、教科書的なサミュエルソン条件を導いた。そこで用いた最大化問題 (1.3) はある特定のパレート効率的な資源配分をもたらすものであった。逆に、任意のパレート効率的な資源配分が (1.3) の解として表現できるかという問題を考察しておこう。この作業はサミュエルソン条件によって公共財を含む経済におけるあらゆるパレート効率的資源配分の性質を記述できるかという疑問に肯定的に答えることになる。

補助定理 1.3 任意のパレート効率的資源配分は、適切にパラメータ $\bar{u}_i, i = 1, \dots, n$ を選ぶとき、問題 (1.3) の解として得られる。

[証明]⁷ 組 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ を任意のパレート効率的な資源配分[†] とする。ここで、

$$\bar{u}_i \stackrel{\text{def}}{=} u_i(x^{i*}), i = 2, 3, \dots, n$$

を定義すると、1.3 のタイプの問題が得られる。その解を $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ とする。 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ は (1.3) の制約条件を満たすから、 $u_1(\tilde{x}^1) \geq u_1(x^{1*})$ でなければならない。もし、 $u_1(\tilde{x}^1) > u_1(x^{1*})$ が成立するならば、

$$u_1(\tilde{x}^1) > u_1(x^{1*}) \text{ かつ } u_j(\tilde{x}^j) \geq u_j(x^{j*}), j = 2, \dots, n$$

となる。これは $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的な資源配分であることに矛盾している。よって、 $u_1(\tilde{x}^1) = u_1(x^{1*})$ でなければならない⁸。

⁷この証明においては、微分可能性は必要でないことに注意しておこう。

⁸同様に、1 以外の他のどの家計 j についても $u_j(\tilde{x}^j) = u_j(x^{j*})$ が成立する。

定義 1.2 を参照せよ。

以上の議論によって、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が (1.3) の解であることが得られた。■

1.3.2 一般的な方法による表現

前サブセクションでは微分を用いて、教科書的なサミュエルソン条件を導いた。この節においては、微分のような無限の演算を含む操作を用いず、公共財を含む経済における資源配分の効率性条件を検討することが、目標である。効用関数 u^i については仮定 1.1、生産可能集合 Y については仮定 1.2 が満たされるものとする。

資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ を任意のパレート効率的な資源配分とする。ここで、配分 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ が実行可能であることは、

$$F \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x^1, \dots, x^n, y) \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_j^i \leq y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, \dots, \ell, \\ x_{\ell+1}^i \leq y_{\ell+1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ y \in Y \end{array} \right. \right\}$$

を定義するとき、 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}) \in F$ によって表現される。さらに、

$$F_{1(\cdot)} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ (x^1, \dots, x^n, y) \in F \mid u_i(x^i) \geq u_i(x^{i*}), \quad i = 2, \dots, n, \right\}$$

とさらに制約する。この時、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が

$$\max u^1(x^1) \text{ subject to } (x^1, \dots, x^n, y) \in F_{1(\cdot)} \quad (1.12)$$

の解であることを示すことが最初の目的である。問題 (1.12) は前節の (1.3) と同一の問題であることに注意せよ⁹。

問題 1.12 の解を $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y})$ とする。 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*) \in F_{1(\cdot)}$ であるから、明らかに $u_1(\tilde{x}^1) \geq u_1(x^{1*})$ でなければならない。もし、 $u_1(\tilde{x}^1) > u_1(x^{1*})$ が成立するならば、

$$u_1(\tilde{x}^1) > u_1(x^{1*}) \text{ かつ } u_j(\tilde{x}^j) \geq u_j(x^{j*}), \quad j = 2, \dots, n$$

⁹問題 (1.3) と (1.12) の最大化問題の解の存在は数学付録で示されている。

となる。これは $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的な資源配分であることに矛盾している。よって、 $u_1(\tilde{x}^1) = u_1(x^{1*})$ でなければならない¹⁰。

以上の議論によって、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が (1.12) の解であることが得られた。

さて、次の課題に入ろう。それは最大化問題 (1.3) 又は (1.12) のラグランジュ法による微分を用いた必要条件によらず、パレート効率的資源配分の特徴をより一般的に把握することである。

$(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ をパレート効率的資源配分とし、

$$\text{任意の家計 } i \text{ にある私的財 } j \text{ が存在して } x_j^{i*} \neq 0 \text{ である。} \quad (1.13)$$

を満たすとする。(1.13) はパレート効率的資源配分として取り上げている $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ にはある個人に私的財の消費がすべてゼロとなるようなものを考慮していないということである。さらに、効用関数についてより強い仮定をおく。つまり、

[強単調性] : 集合 $\{x^i \in X_i \mid u_i(x^i) > u_i(0)\}$ において、 u_i は厳密に増加的である、 $i = 1, 2, \dots, n$.

を仮定する。 $u_i(0)$ は仮定 (M) から見て、第 i 家計の取りうる効用の最小値である。この仮定によって、効用の最小値よりも高い効用を与える消費集合では厳密に増加的である。これは多少強い仮定である。

次の変換を準備する。つまり、資源配分 (x^1, \dots, x^n, y) にたいして、

$$\xi^1(x^1) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1^1 \\ \vdots \\ x_\ell^1 \\ x_{\ell+1}^1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \xi^n(x^n) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} x_1^n \\ \vdots \\ x_\ell^n \\ 0 \\ \vdots \\ x_{\ell+1}^n \end{pmatrix}, \eta(y) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_\ell \\ y_{\ell+1} \\ \vdots \\ y_{\ell+1} \end{pmatrix}$$

¹⁰同様に、1以外の他のどの家計 j についても $u_j(\tilde{x}^j) = u_j(x^{j*})$ が成立する。

とする。さらに、いくつかの集合を定義する。つまり、

$$\Xi \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{i=1}^n \xi^i(x^i) \mid \forall i \ u_i(x^i) \geq u_i(x^{i*}), \exists j \ u_j(x^j) > u_j(x^{j*}) \right\}$$

$$H \stackrel{\text{def}}{=} \{ \eta(y) \mid y \in Y \} + \left\{ \sum_{j=1}^n \xi^j(\omega^j) \right\}$$

とする。ここで、

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) \notin \Xi \quad \text{かつ} \quad \eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \in H$$

は明らかである。

最初に、例外的なケースを除けば、(1.12) の解 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ は、

$$\sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) = \eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \quad (1.14)$$

が成立させることを確かめよう。 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*) \in F_{1(\cdot)}$ であるから、 $\sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) \leq \eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i)$ が成立している。ある財 j について厳密な不等号が成立するときには、第1家計の消費ベクトル x^{1*} の第 j 成分を等号が成立するまで増加させたものを \tilde{x}^1 とする。 x^{1*} を \tilde{x}^1 に代えたとき、仮定 1.1 (M) より、(i) 第1家計の効用は厳密に増加するか、あるいは、(ii) 減少することはない。一方、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が (1.12) 解であるから、 $u_1(\tilde{x}^1)$ は問題 (1.12) の解における第1家計の効用 $u_1(x^{1*})$ より厳密に高くなることはない。したがって、(i) は成立し得ない。(ii) の場合、つまり、第1家計の消費を増加させて彼の効用が一定に止まるケースだけが残される。そのようなケースにおいては、 $(\tilde{x}^1, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はパレート効率的資源配分であり、問題 (1.12) の解である。よって、(1.12) の解 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が (1.14) を満たすと想定して議論を進行させよう。

次に

$$\Xi \cap H = \emptyset \quad (1.15)$$

であることは、 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的であることから明らかである。また、 Ξ と H が凸集合であることも明らかである。そこで、集合差 $H - \Xi$ を作れば、明らかに、

- (i) $\Xi - H$ は凸集合である。
- (ii) $(\Xi - H) \cap (\mathbb{R}_+^{\ell+n}) = \emptyset$.

が成り立つ（各自証明を試みよう）。次の分離定理を利用する。

分離定理† \mathbb{R}^n の空でない凸集合 X が $-\mathbb{R}_+^n$ の内点を含まなければ、法線ベクトル $p \neq 0$ が存在して、原点を通り、 X と $-\mathbb{R}_+^n$ を分離する超平面：

† 入谷・久我『数理経済学入門』定理 10.12, page 252 を参照せよ。

$$px \geq 0, \forall x \in X, \text{ かつ } p \geq 0$$

が存在する。

[分離定理の適用] (i) と (ii) をみれば、 $\Xi - H$ に分離定理を適用できる環境は整っている。したがって、あるベクトル $p \geq 0$, $p \in \mathbb{R}_+^{\ell+n} \setminus \{0\}$ が存在して、

$$p\zeta^1 \geq p\zeta^2, \forall \zeta^1 \in \Xi, \forall \zeta^2 \in H, \quad (1.16)$$

が成立する。この性質を以下において何度も利用する。そして、得られたものを解釈していくときに、 p を財の価格であるかのように考えていく。

最初に、 $\sum_{i=1}^n (\xi^i(x^{i*}) + \varepsilon \mathbf{1}) \in \Xi$, $\eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \in H$ に着目する。ここで $\mathbf{1}$ はすべての成分が 1 の $\ell + n$ 次元ベクトル、かつ $\varepsilon > 0$ とする。よって、(1.16) より

$$p \sum_{i=1}^n (\xi^i(x^{i*}) + \varepsilon \mathbf{1}) \geq p \left(\eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \right)$$

となる。これは任意の $\varepsilon > 0$ について成立するから、

$$p \sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) \geq p \left(\eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \right)$$

でなければならない。これと (1.14) とを考慮すれば,

$$p \sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) = p \left(\eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \right) \quad (1.17)$$

ということになる。

[生産者] 不等式 (1.16) と等式 (1.17) を考慮すれば,

$$p\eta(y^*) \geq p\eta(y) \text{ for all } y \in Y$$

である。これを書き換えれば, 任意の $y \in Y$ にたいして

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j^* + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+i} \right) y_{\ell+1}^* \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+i} \right) y_{\ell+1} \quad (1.18)$$

である。これは生産者の直面する財価格が $(p_1, \dots, p_{\ell}, \sum_{i=1}^n p_{\ell+i})$ であるとき生産者の利潤最大化をあたえる生産が y^* であることを意味している。

[家計] 仮定 [every good is producible] に着目すれば, ある $y^{\#}$ が存在して, $\eta(y^{\#}) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \in H \cap \mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ である。また, $\sum_{i=1}^n (\xi^i(x^{i*}) + \varepsilon \mathbf{1}) \in \Xi$, $\varepsilon > 0$ であるから, (1.16) によって,

$$p \sum_{i=1}^n (\xi^i(x^{i*}) + \varepsilon \mathbf{1}) \geq p\eta(y^{\#}) + p \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) > 0$$

となる。これは任意の ε について成立するから,

$$p \sum_{i=1}^n \xi^i(x^{i*}) > 0 \quad (1.19)$$

である。ここで, $I^i \stackrel{\text{def}}{=} p \xi^i(x^{i*})$ と定義すれば, (1.17) より

$$I^i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} + p_{\ell+i} x_{\ell+1}^{i*}, i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^n I^i = p \left(\eta(y^*) + \sum_{i=1}^n \xi^i(\omega^i) \right)$$

である。以下、 I^i を家計 i の所得であるかのように考えてみる。いま \hat{x}^i が $u_i(\hat{x}^i) > u_i(x^{i*})$ を満たしたとしてみよう。すると、 $\sum_{k \neq i} \xi^k(x^{k*}) + \xi^i(\hat{x}^i) - \eta(y^*) - \sum_{k=1}^n \xi^k(\omega^k) \in \Xi - H$ である。よって

$$\begin{aligned} 0 &\leq p \sum_{k \neq i} \xi^k(x^{k*}) + p \xi^i(\hat{x}^i) - p \eta(y^*) - p \sum_{k=1}^n \xi^k(\omega^k) \\ &= p \xi^i(\hat{x}^i) - I^i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \hat{x}_j^i + p_{\ell+i} \hat{x}_{\ell+1}^i - I^i \end{aligned}$$

となる。つまり、

$$u_i(\hat{x}^i) > u_i(x^{i*}) \Rightarrow I^i \leq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \hat{x}_j^i + p_{\ell+i} \hat{x}_{\ell+1}^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が成立しなければならない。この対偶をとれば、

$$I^i > \sum_{j=1}^{\ell} p_j \tilde{x}_j^i + p_{\ell+i} \tilde{x}_{\ell+1}^i \Rightarrow u_i(\tilde{x}^i) \leq u_i(x^{i*}), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

となる。いま、(1.19) を考慮すると、少なくとも一人の家計 h について $I^h > 0$ である。そこで、ある消費ベクトル \hat{x}^h が存在して、

$$I^h \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \hat{x}_j^h + p_{\ell+h} \hat{x}_{\ell+1}^h \quad \text{かつ} \quad u_h(\hat{x}^h) > u_h(x^{h*})$$

が成立したと仮定する。 $x^h(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x^{h*} + (1 - \lambda) \hat{x}^h$ とすれば、任意の λ ($0 < \lambda < 1$) について、 $I^h > \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^h(\lambda) + p_{\ell+h} x_{\ell+1}^h(\lambda)$ である。一方、 λ が十分ゼロに近ければ u_h の連続性から、 $u_h(x^h(\lambda)) > u_h(x^{h*})$ となる。これは矛盾である。よって、

$$u_h(\hat{x}^h) > u_h(x^{h*}) \Rightarrow I^h < \sum_{j=1}^{\ell} p_j \hat{x}_j^h + p_{\ell+h} \hat{x}_{\ell+1}^h$$

すなわち,

$$I^h \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \tilde{x}_j^h + p_{\ell+h} \tilde{x}_{\ell+1}^h \Rightarrow u_h(\tilde{x}^h) \leq u_h(x^{h*}) \quad (1.20)$$

が成立しなければならない。

これは家計 h が所得 I^h 価格 $(p_1, \dots, p_{\ell}, p_{\ell+h})$ のもとで効用最大化をして、消費ベクトル x^{h*} を選択していることを意味している。これを成立させた要点は $I^h > 0$ であった。以下の目的は、特定の家計 h においてはではなく、任意の家計 i においてもこの事実が成り立つことを示すことである。そのためには、 $I^i > 0$ を示せばよい。なぜなら、家計 h における議論を繰り返すことができるからである。

いま、ある財価格について $p_j = 0$ が成立したとしてみよう。仮定 [強単調性] と特別の家計 h について得られた $I^h > 0$ を考慮すれば、 $u_h(x^{h*} + e_j) > u_h(x^{h*})$ である。ここで、 e_j は第 j 成分が 1 で他がすべてゼロの単位ベクトルである。さらに、消費ベクトル $x^{h*} + e_j$ は価格 $(p_1, \dots, p_{\ell}, p_{\ell+h})$ と所得 I^h のもとで購入可能である。これは (1.20) に矛盾する。したがって、

$$p_j > 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, \ell + h$$

が成立する。前提 (1.13) から、任意の家計について $I^i = p \xi^i(x^{i*}) > 0$ が得られる。したがって、第 h 家計の議論をいま一度繰り返すことができ、

$$I^i \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \tilde{x}_j^i + p_{\ell+i} \tilde{x}_{\ell+1}^i \Rightarrow u_i(\tilde{x}^i) \leq u_i(x^{i*}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.21)$$

が得られる。これは第 i 家計が $(p_1, \dots, p_{\ell}, p_{\ell+i})$ という価格と所得 I^i に直面すれば、自発的に x^{i*} を選択するという他にない。さらに、これは効用関数への仮定 [強単調性] より、 $p_{\ell+i} > 0$ も確立される。

[所得再分配下の市場均衡] 配分 $(\xi^1(x^{1*}), \dots, \xi^n(x^{n*}), \eta(y^*))$ における分離平面の法線ベクトル $p \gg 0$ のもとで、これまで議論した生産者の選択 y^* と消費者の選択 (x^{1*}, \dots, x^{n*}) に関する結論から自然と発想されるのは、消費と生産のバランスのことである。これまでに得られた等式 (1.14) はその

バランスを意味していることが読み取れる。そのときに、(1.14) の右辺が厳密に大きな不等式となる場合には第 1 家計の消費を等号が成立するまで増加させて、新しい配分 $(\tilde{x}^1, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的な資源配分であり、そして同時に、問題 (1.12) の解であることを指摘した。これまでの [生産者] と [家計] の項で議論したことはすべて $(\tilde{x}^1, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ に関して成立する。ここで、仮定 [強単調性] から明らかに $u_1(x^{1*}) < u_1(\tilde{x}^1)$ である。これは、 $(\tilde{x}^1, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ がパレート効率的な資源配分であることに反している。したがって、(1.14) は当初考慮していた $(\tilde{x}^1, x^{2*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ について成立しなければならない。関係 (1.14) を書き換えると、

$$\sum_{i=1}^n x_j^{i*} = y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$x_{\ell+1}^{1*} = \dots = x_{\ell+1}^{n*} = y_{\ell+1}^*$$

となる。これに加えて、生産者の利潤に対する家計 i の分配率を θ^i とすれば、生産量 y^* が価格 $(p_1, \dots, p_\ell, \sum_{i=1}^n p_{\ell+i})$ で評価されるときに利潤を π と書けば、(1.17) より、

$$\sum_{i=1}^n I^n = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j^* + \left(\sum_{j=1}^{\ell} p_{\ell+i} \right) y_{\ell+1}^*$$

$$= \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi \right\}$$

となる。いま、

$$T^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - I^i, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

として、家計 i に T^i だけの課税をすれば（負の数なら補助金を与えれば）、そのときの可処分所得は I^i となる。しかも、 $T_i, i = 1, 2, \dots, n$ が所得の再分配をもたらすこと、すなわち、 $\sum_{i=1}^n T_i = 0$ は T_i の定義と (1.17) より明らかに成立する。したがって、配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ は第 i

家計が T^i だけの課税を受け、価格 $(p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+i})$ に直面し、企業が価格 $(p_1, \dots, p_\ell, \sum_{i=1}^n p_{\ell+i})$ に直面しているときの『競争均衡』となっている。このとき、

$$\begin{aligned} \text{生産者の公共財価格} &= \sum_{i=1}^n p_{\ell+i} \\ &= \sum_{i=1}^n \text{第 } i \text{ 家計の公共財価格} \end{aligned}$$

が成立している。これは前節のサミュエルソン条件に他ならない。以上を定理の形で表現しておこう。

定理 1.2 任意の (1.13) をみたくパレート効率的資源配分は、適切に所得分配を変更することによって、競争均衡によって達成される。

1.3.3 社会的厚生との関連

以前のサブセクションでは、ある家計（家計 1）に着目して、他の家計の効用の一定値に定めた上で、家計 1 の効用を実行可能な配分の中でもっとも高めるという問題設定を利用した。効用を最大化する対象が家計 1 である必然性はないが、ある 1 家計の効用最大化でなければならない。この限りにおいて、パレート効率性と社会的厚生の最大化との間には必ずしも明瞭な関係がないように見える。一方、社会的厚生を全家計の効用の総計によって測るとき、パレート効率性が効用の総計の最大化によって表現できるならば、効率性と個人主義的な社会的厚生関数 individualistic social welfare function との間に強固なつながりが存在することになる。このサブセクションでは、この問題に肯定的な回答を与える。用いられる手法は Negishi (1960) によって開発されたものの一部である¹¹。

¹¹論文 Negishi, T. (1960), "Welfare Economics and Existence of an Equilibrium for a Competitive Economy," *Metroeconomica*, 92-97 を参照せよ。Foley, D. K. (1967), "Resource Allocation and Public Sector," *Yale Economic Essays* には Negishi 論文で確立されたことが用いられている。

そのために、仮定 1.1, 1.2 [強単調性] に加えて、さらに、効用関数の仮定を強める。

仮定 1.3 (CU) 各家計の効用関数は凹関数 concave function である。

そこで、次のような集合を定義する。

$$U \stackrel{\text{def}}{=} \{ (u_1(x^1), \dots, u_n(x^n)) \mid \exists y \in Y : (x^1, \dots, x^n, y) \in F \}$$

ここで、集合 F は実行可能な配分の集合で、前サブセクションで定義されたものである。集合 U は各家計が享受できる効用のすべてを表現したもので、効用可能領域と呼ばれる。その境界にあって不等号 \leq に関する上限からなるものは効用フロンティアー utility frontier と呼ばれる。

[効用可能領域の凸性] 集合 U が凸集合であることを見ておこう。いま、 (v^1, \dots, v^n) と $(v^{1'}, \dots, v^{n'})$ を任意に U から選んでくる。ある配分 (x^1, \dots, x^n, y) と $(x^{1'}, \dots, x^{n'}, y')$ が F の中に存在して、 $v^i = u^i(x^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ かつ $v^{i'} = u^i(x^{i'})$, $i = 1, 2, \dots, n$ となる。 λ を $0 \leq \lambda \leq 1$ を満たす任意の実数とすると、 u^i が凹関数であることから、

$$\begin{aligned} u^i(\lambda x^i + (1 - \lambda)x^{i'}) &\geq \lambda u^i(x^i) + (1 - \lambda)u^i(x^{i'}) \\ &= \lambda v^i + (1 - \lambda)v^{i'}, i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

である。ここで、

$$h^i(\mu) \stackrel{\text{def}}{=} u^i(\mu(\lambda x^i + (1 - \lambda)x^{i'}))$$

を定義すれば、

$$\begin{aligned} h^i(1) &= u^i(\lambda x^i + (1 - \lambda)x^{i'}) \\ h^i(0) &= u^i(0) \end{aligned}$$

である。 $u^i(0)$ が効用の最小値であることによって、中間値の定理より、ある μ^i , $0 \leq \mu^i \leq 1$ が存在して、

$$h^i(\mu^i) = \lambda v^i + (1 - \lambda)v^{i'}$$

が成立する。しかも, $1 \leq j \leq \ell$ について

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \mu^i (\lambda x_j^i + (1-\lambda)x_j^{i'}) &\leq \sum_{i=1}^n (\lambda x_j^i + (1-\lambda)x_j^{i'}) \\ &= \lambda(y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i) + (1-\lambda)(y_j' + \sum_{i=1}^n \omega_j^i) \\ &= \lambda y_j + (1-\lambda)y_j' + \sum_{i=1}^n \omega_j^i \end{aligned}$$

である。さらに,

$$\mu^i (\lambda x_{\ell+1}^i + (1-\lambda)x_{\ell+1}^{i'}) \leq (\lambda y_{\ell+1} + (1-\lambda)y_{\ell+1}'), i = 1, 2, \dots, n$$

でもある。よって, Y の凸性を考慮すると, $\lambda y + (1-\lambda)y' \in Y$ であり, Y が [free disposal] を満たすことを考慮すれば,

$$(\mu^1 (\lambda x^1 + (1-\lambda)x^{1'}), \dots, \mu^n (\lambda x^n + (1-\lambda)x^{n'}), \lambda y + (1-\lambda)y') \in F$$

である。これは, $(\lambda v^1 + (1-\lambda)v^{1'}, \dots, \lambda v^n + (1-\lambda)v^{n'}) \in U$ を意味する。したがって U は凸集合である。

[効用フロンティアとパレート効率資源配分との等価性]¹² 次に, パレート効率的な資源配分の集合と効用フロンティアを

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \{ (x^1, \dots, x^n, y) \in F \mid (x^1, \dots, x^n, y) \text{ はパレート効率的である。} \}$$

$$U_f \stackrel{\text{def}}{=} \{ v \in U \mid v \text{ は順序 } \leq \text{ に関する maximal element. } \}$$

と定義する。配分 $(x^1, \dots, x^n, y) \in E$ を任意に選んでおく。他の実行可能な配分 $(x^{1'}, \dots, x^{n'}, y') \in F$ で, あらゆる i について $u_i(x^{i'}) \geq u_i(x^i)$ を満たし, さらに, ある家計 j について $u_j(x^{j'}) > u_j(x^j)$ となる配分は存在しない。したがって, $(u_1(x^1), \dots, u_n(x^n))$ は \leq に関して U における maximal element である。よって, $(u_1(x^1), \dots, u_n(x^n)) \in U_f$ である。

¹²この部分は効用関数の凹性に依存しないことに注意せよ。

逆に, $v \in U_f$ とする。ある実行可能な配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*) \in F$ が存在して, $v = (u_1(x^{1*}), \dots, u_n(x^{n*}))$ である。 U_f の定義によって, 他のどのような実行可能な配分についても $u_i(x^{i'}) \geq u_i(x^{i*})$ があらゆる i について成立し, さらに, ある家計 j について $u_j(x^{j'}) > u_j(x^{j*})$ となることはあり得ない。したがって, 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*) \in F$ はパレート効率的である。

[効用フロンティアと個人主義的社会的厚生] $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ を正の定数とする。いま, 関数

$$(x^1, \dots, x^n, y) \in F \mapsto \alpha_1 u_1(x^1) + \dots + \alpha_n u_n(x^n)$$

を想定する。これは実行可能な資源配分にたいして, ある実数値を対応させる関数で, 社会的厚生関数と呼ばれる。この社会的厚生は個人の効用 (u_1, \dots, u_n) に依存しているのだから, 個人主義的であると言われる。

ここで, 次の問題を考察する。

$$\max \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x^i) \quad \text{subject to } (x^1, \dots, x^n, y) \in F \quad (1.22)$$

これは社会的厚生を最大にするような配分を実行可能なものの中から求めようという問題である。財政分野ではよく見る形の問題であろう。この最大化問題の解が存在する場合には¹³ [強単調性] のもとで, その配分がパレート効率的であることは容易に想像できよう。では, その逆はどうであろうか。それについて次の定理を準備する。

定理 1.3 任意のパレート効率的資源配分は, 適切に $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ を選択すれば, 問題 (1.22) の解として得られる。逆に, ある $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbb{R}_+^n \setminus \{0\})$ に関する問題 (1.22) の解はパレート効率的資源配分である。

[証明] 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ をパレート効率的資源配分とする。効用フロンティアとパレート効率資源配分との等価性より, $u^* \stackrel{\text{def}}{=} (u_1(x^{1*}), \dots, u_n$

¹³ 解の存在は集合 F のコンパクト性によって得られる。 F のコンパクト性については数学付録 1.4.1 を参照せよ。

$(x^{n*}) \in U_f$ である。 $U^\circ \stackrel{\text{def}}{=} U \setminus U_f$ とすれば,

$$\{u^*\} \cap U^\circ = \emptyset$$

† 効用プロファイル $(u_1(x^{1*}), \dots, u_n(x^{n*}))$ が U の \leq に関する maximal element であることに注意。

である。したがって, 集合差 $\{u^*\} - U^\circ$ は $-\mathbb{R}_+^n$ の内点を含まず†, かつ, 凸集合である。分離定理によって, 法線ベクトル $q \geq 0$ が存在して, $\{u^*\} - U^\circ$ と $-\mathbb{R}_+^n$ を分離する。つまり,

$$qw \geq 0, \forall w \in \{u^*\} - U^\circ,$$

$$\text{かつ } q \geq 0, q \neq 0$$

を満たす。よって,

$$qu^* \geq qv, \forall v \in U^\circ$$

である。いま, ある配分 $(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}) \in F$ が存在して, $q\tilde{v} > qu^*$, $\tilde{v} \in U$, $\tilde{v} \stackrel{\text{def}}{=} (u_1(\tilde{x}^1), \dots, u_n(\tilde{x}^n))$ となったと仮定してみる。明らかに, 少なくとも一人の家計について (それを家計1とする), $u_1(\tilde{x}^1) > u_1(0)$ である。十分小さな正の ε にたいして

$$(\tilde{x}^1 - \varepsilon \mathbf{1}, \tilde{x}^2, \dots, \tilde{x}^n, \tilde{y}) \in F \quad \text{かつ}$$

$$v(\varepsilon) \in U^\circ, \text{ where } v(\varepsilon) \stackrel{\text{def}}{=} (u_1(\tilde{x}^1 - \varepsilon \mathbf{1}), u_2(\tilde{x}^2), \dots, u_n(\tilde{x}^n))$$

である。 ε をゼロに近づけると, u_1 の連続性から, 十分ゼロに小さな ε にたいして, $qv(\varepsilon) > qu^*$ でなければならない。これは $v(\varepsilon) \in U^\circ$ に矛盾する。したがって,

$$qu^* \geq qv, \forall v \in U$$

が成立しなければならない。 $\alpha_i \stackrel{\text{def}}{=} q_i, i = 1, 2, \dots, n$ とすれば, 上の事実は, パレート効率的資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ が

$$\max \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x^i) \text{ subject to } (x^1, \dots, x^n, y) \in F$$

の解であることに他ならない。

逆は補助定理 1.3 とほとんど同じ手続きで証明できる。この部分には効用関数が凹関数であるという仮定は必要ない。■

上の定理 1.3 はいささか重要な意味を持っている。それはパレート効率性と個人主義的な社会的厚生関数の最大化はほぼ同一の内容を持っているということである¹⁴。したがって、効用に付けられるウエイト $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ の選択はパレート効率的資源配分の選択とほぼ等価である。したがって、

α_i が何であるかを解明することは、経済学の用いる効率性への一層の理解につながり、ついで、個人主義的な社会的厚生関数とは何であるかを考察する鍵となる。

とすることができよう。

[最大化の必要条件] ここでは、 α_i が何であるかを把握するために、効用関数の $\mathbb{R}_{++}^{\ell+1}$ における微分可能性を仮定するとともに、微分可能な領域ではすべての限界効用は正值、すなわち、 $\partial u_i / \partial x_j^i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, \ell + 1$ と仮定する。生産可能性集合 Y は微分可能な実数値関数 f によって $Y = \{y \in \mathbb{R}^{\ell+1} \mid f(y) \leq 0\}$ と表現できるとする。さらに、 f は凸関数 convex function であると仮定する[†]。効用につけられるウエイトには正值性 $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2, \dots, n$ を仮定し、さらに、問題 (1.22) に内点解があると仮定する。問題 (1.22) に対応するラグランジュ関数は

† 実数値関数 f が凸関数であれば、このようにして得られる生産可能性集合 Y は凸集合であることを確かめなさい。

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i(x^i) + \sum_{j=1}^m \mu_j \left(y_j + \sum_{i=1}^n \omega_j^i - \sum_{i=1}^n x_j^i \right) + \sum_{i=1}^n \lambda_i (y_{\ell+1} - x_{\ell+1}^i) - \eta f(y)$$

¹⁴ 「ほぼ同一の内容」という表現には、「効用関数が凹関数ならば個人主義的な社会的厚生関数の最大化とパレート効率的資源配分を求めることは一致し、準凹関数ならば、個人主義的な社会的厚生関数の最大化はパレート効率的な資源配分をもたらす」という内容が込められている。

となる。ここで、ラグランジュ乗数 μ_j, λ_i, η はすべて非負値である。解を $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ とすれば、最大化の必要条件は

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^{i*}) - \mu_j = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (1.23)$$

$$\alpha_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i}(x^{i*}) - \lambda_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.24)$$

$$\mu_j - \eta \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (1.25)$$

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i - \eta \frac{\partial f}{\partial y_{\ell+1}}(y^*) = 0, \quad (1.26)$$

$$y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_j^i - \sum_{i=1}^n x_j^{i*} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, \ell \quad (1.27)$$

$$y_{\ell+1}^* - x_{\ell+1}^{i*} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.28)$$

$$f(y^*) = 0, \quad (1.29)$$

となる。条件 (1.23)–(1.24) は効用の微分に関する、条件 (1.25)–(1.26) は f の微分に関する、最後に (1.27)–(1.29) は配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ の実行可能性に関する条件である。「これらの条件が、ある所得分配とある価格のもとでの競争均衡状態を記述するものである」ことを示すことが以下の目的である。

[価格] 上の (1.23)–(1.29) において、第 i 家計に関する条件に着目すると、

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^{i*}) = \frac{\mu_j}{\alpha_i}, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i}(x^{i*}) = \frac{\lambda_i}{\alpha_i}$$

となる。これは効用最大化問題から得られるラグランジュの必要条件に類似している。したがって、「ある競争均衡」における価格はこれをヒントにして導入できる。

限界効用と α_i が正値であるという仮定から μ_j, λ_i が正値であることがわかる。限界代替率 $(\partial u_i / \partial x_j^i) / (\partial u_i / \partial x_1^i)$ はすべて正値である。これら

ら, (1.25) によって η が正值であり, さらに, (1.25) と (1.26) によって各財の限界変換率 $(\partial f/\partial y_j)/(\partial f/\partial y_1)$ もすべて正值である。必要条件を限界代替率と限界変換率について整理すると,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i/\partial x_j^i}{\partial u_i/\partial x_1^i} &= \frac{\mu_j}{\mu_1} = \frac{\mu_j/\eta}{\mu_1/\eta} \\ &= \frac{\partial f/\partial y_j}{\partial f/\partial y_1}, i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, \ell \\ \frac{\partial u_i/\partial x_{\ell+1}^i}{\partial u_i/\partial x_1^i} &= \frac{\lambda_i}{\mu_1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\mu_1} &= \frac{\partial f/\partial y_{\ell+1}}{\partial f/\partial y_1}\end{aligned}$$

が得られる。これらの表現を眺めると, 私的財の実行可能性の ℓ 種類の制約に付けられているラグランジュ乗数の比率 μ_j/μ_1 は通常の価格比率に類似の関係を有している。つまり, 私的財に関して, 限界代替率, 限界変換率そして価格比率の三者が等しいという関係である。さらに最後のものは公共財の家限界代替率の計に関する和が限界変換率に等しいというサムエルソン・条件を示している。

これらの点を考慮して, ここで, $p_j \stackrel{\text{def}}{=} \mu_j$ と定義してみよう。さらに, 公共財価格を第 i 家計にとっては $p_{\ell+1}^i \stackrel{\text{def}}{=} \lambda_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, そして生産者にとっては $p_{\ell+1} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \lambda_i$ とする。このとき, 上述の関係は,

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^{i*}) &= \frac{1}{\alpha_i} p_j, j = 1, 2, \dots, \ell \\ \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i}(x^{i*}) &= \frac{1}{\alpha_i} p_{\ell+1}^i, i = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\partial f/\partial y_j}{\partial f/\partial y_1} &= \frac{p_j}{p_1}, j = 2, 3, \dots, \ell + 1\end{aligned}$$

と表現される。これらは効用最大化行動と利潤最大化行動の必要条件に極めてよく似ている。

[効用最大化] いま, 第 i 家計の所得を $I^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*}$ と定義する。いま, $I^i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^i + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^i$ を満たす任意の $x^i \stackrel{\text{def}}{=} (x_1^i, \dots, x_{\ell}^i, x_{\ell+1}^i)$ を選んでくると, u_i が凹関数であることから,

$$\begin{aligned} u_i(x^i) - u_i(x^{i*}) &\leq \sum_{j=1}^{\ell+1} (x_j^i - x_j^{i*}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^{i*}) \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} (x_j^i - x_j^{i*}) \frac{p_j}{\alpha_i} + (x_{\ell+1}^i - x_{\ell+1}^{i*}) \frac{p_{\ell+1}^i}{\alpha_i} = 0 \end{aligned}$$

である¹⁵。したがって, $u_i(x^i) \leq u_i(x^{i*})$ が成立する。これは, x^{i*} が

$$\max u_i(x^i) \text{ subject to } \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^i \leq I^i$$

の内点解であることを意味する。この最大化問題のラグランジュ関数を $u_i + \beta_i(I^i - \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j - p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^i)$ とすれば, x^{i*} が内点解であるから, ある β_i が存在して,

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j^i}(x^{i*}) = \beta_i p_j, \quad j = 1, 2, \dots, \ell, \quad \frac{\partial u_i}{\partial x_{\ell+1}^i}(x^{i*}) = \beta_i p_{\ell+1}^i$$

を満たす。したがって,

$$\beta_i = \frac{1}{\alpha_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.30)$$

が成立する。

[利潤最大化] 直前の議論とほとんど同じ議論をする。関数 f は凸関数であるから, y を任意の生産可能なベクトルとするとき,

$$0 \leq f(y) - f(y^*) \leq \sum_{j=1}^{\ell+1} (y_j - y_j^*) \frac{\partial f}{\partial y_j}(y^*)$$

¹⁵これは u_i が準凹関数であることの必要十分条件を利用している。現在のサブセクションでは効用関数は凹関数であると仮定されている。準凹関数の必要十分条件には, 補助定理 10.2 page 239, 入谷・久我『数理経済学入門』1999年, 有斐閣を参照せよ。

が得られる。 $\partial f / \partial y_1(y^*)$ の正值性を用いると、上の不等号は、

$$\begin{aligned} 0 &\leq (y_1 - y_1^*) + \sum_{j=2}^{\ell+1} (y_j - y_j^*) \frac{\partial f / \partial y_j(y^*)}{\partial f / \partial y_1(y^*)} \\ &= (y_1 - y_1^*) + \sum_{j=2}^{\ell+1} (y_j - y_j^*) \frac{p_j}{p_1} \end{aligned}$$

となる。これは、 $py \leq py^*$ となって利潤の最大化を意味している。

[所得分配の整合性] これまで、「価格 p を定義できること」、「ある所得水準 I^i での家計 i の最適な選択が x^{i*} であること」そして「 y^* が利潤最大化の生産者の行動であること」が示されてきた。これらが競争均衡としての意味を持つためには、与えられた所得分配 $I^i, i = 1, 2, \dots, n$ が価格と配分の組 $(p, (x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*))$ と整合的でないといけない。つまり、

$$\sum_{i=1}^n I^i = \sum_{i=1}^n p\omega^i + py^*$$

が成立する必要がある。右辺は現在の価格と配分の組による社会的な総所得であるからである。(1.27) と (1.28) を利用すると、

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n I^i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} + \sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*} \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} p_j \sum_{i=1}^n x_j^{i*} + \sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i y_{\ell+1} \\ &= \sum_{j=1}^{\ell} p_j \sum_{i=1}^n (\omega_j^i + y_j^*) + \sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i y_{\ell+1} = \sum_{i=1}^n p\omega^i + py^* \end{aligned}$$

となる。これは目標としていた所得分配の整合性に他ならない。つまり、配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ は何らかの所得再分配を前提にすれば、競争均衡によって達成されるのである。

[結論] 以上によって明らかになったことは、社会的厚生関数における個人 i のウエイト（社会的重要度） α_i は「ある所得再配分によって支えられる競争均衡における家計の最大化問題に付随するラグランジュ乗数 β_i の逆数である」ことが得られた。ここで、ミクロ経済学における周知の事実「 β_i は第 i 家計の所得の限界効用である」を思い起こすと[†],

個人主義的社会的厚生関数における家計の社会的重要度 $\alpha_i, i = 1, 2, \dots, n$ は家計の所得の限界効用の逆数である

ということになる。この内容の意味するところは極めて興味深い。つまり、通常の見方からすれば、所得の額の小さい家計は所得の限界効用が大きく、所得の大きい家計では所得の限界効用は小さい。その逆数が個人主義的社会的厚生関数のウエイトとなることが、パレート効率性の持っている特徴である。したがって、パレート効率性は所得の大きな家計に相対的に大きな重要性をおくことを意味している。これはよく言われる「効率と公平のディレンマ」である。

公共財の存在がこのディレンマをより一層高める可能性がある。たとえば、公共財として警察サービスを取り上げてみる。所得の高い人は自宅の周りに防犯の塀を建設するとか、ガードマンを雇うことが可能で、言い換えると、公共財に代替的な私的財を利用できる。一方、貧困な家計 i にとって、代替的な私的財を選択することは視野になく、公的な警察サービスからの恩恵は大きい。したがって、公共財のもたらす限界効用 $\partial u_i / \partial x_{\ell+1}^i$ は大きいであろう。この傾向は公共財の限界代替率にも見いだせるであろう。すなわち、所得の高い人の公共財の限界代替率は小さく、低い家計のそれは高いことになる。このサブセクションで示されたことは、家計 i において第1私的財への負担にたいする公的な警察サービスへの負担の比 $p_{\ell+1}^i / p_1$ は家計 i の公共財の限界代替率に等しい。これは公共財への負担が所得の低い家計 i に大きいことを意味している。すなわち、パレート効率性は、公共財の存在によって公平性とのディレンマをより一層高めることを意味している¹⁶。

¹⁶これを精密なモデルで記述するのは興味深いテーマとなる。

[†] 2003年度ミクロ経済学 I, 第2章4節の(2.16)式を参照せよ。なお, 2003年度のミクロ経済学 I の講義ノートは <http://www.econ.kobe-u.ac.jp/~iritani/iritani.html> からダウンロード可能である。

1.4 数学付録

1.4.1 (1.3) と (1.12) の解の存在

本章の第3節で3種類の最大化問題を用いた。これらの解の存在は次の定理と定義に基づくものである。

ワイヤーシトラウスの定理 Weierstrass' Theorem : A を \mathbb{R}^n の非空なコンパクト集合とし, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ を実数値連続関数とする。このとき, f は A 上で最大値と最小値を持つ[†]。

[†] 入谷・久我 (1999) 『数理経済学入門』, 有斐閣の127page 定理 5.11 を参照せよ。

定義 1.3 集合 $A(\subset \mathbb{R}^n)$ が有界であるとは, ある正の数 k が存在して, $\|a\| \leq k$ が任意の $a \in A$ について成立することである。

定義 1.4 集合 $A(\subset \mathbb{R}^n)$ が閉集合であるとは, 任意の列 $a^\nu, \nu = 1, 2, \dots$ をとるとき, $\nu \rightarrow \infty$ のとき, $a^\nu \rightarrow a$ が成立するならば, $a \in A$ となることである。

定義 1.5 集合 $A(\subset \mathbb{R}^n)$ がコンパクト集合であるとは, 有界でかつ閉集合となることである。

本章では節やサブセクションごとに仮定や表現に多少の違いがあった。ここでは, もっとも一般的なサブセクション 1.3.2 の記号法を用いる。1.3.1 と 1.3.2 のサブセクションでは, 集合 $F_{1(\cdot)}$ のコンパクト性が, サブセクション 1.3.4 では, 集合 F のコンパクト性が, それぞれの解の存在の十分条件である。1.3.1, 1.3.4 において, $F_{1(\cdot)}$ が非空で閉集合であることは $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*) \in F_{1(\cdot)}$ より明らかである。 $F_{1(\cdot)} \subset F$ であるから, $F_{1(\cdot)}$ のコンパクト性は F がコンパクトであることを示せば得られる。したがって, F のコンパクト性を示せば目的にかなう。

[目標: F の非空コンパクト性] F の閉集合性は明らかであるから, F の有界性を示せばよい。 F が有界でないとしてみよう。 ν を任意の自然数とすると, ある配分 $(x^{1\nu}, \dots, x^{n\nu}, y^\nu) \in F$ が存在して, $\|(x^{1\nu}, \dots, x^{n\nu}, y^\nu)\| > \nu$ を満たす。 $\nu = 1, 2, \dots$ と順次与えれば, 発散する

点列 $\zeta^\nu \stackrel{\text{def}}{=} (x^{1\nu}, \dots, x^{n\nu}, y^\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$ が得られる。この $(\ell+1) \times (n+1)$ 個の実数の並びの中で絶対値が最大となる財の番号と生産者あるいは家計の番号は ν 毎に異なる。しかし、これらは有限であるから、ある財の番号と経済主体について最大となるものが無限回繰り返される。したがって、部分列をとれば、いつも最大値をとる財のインデックスと経済主体を同一であるようにできる。その部分列を、一般性を失うことなく、 ζ^ν , $\nu = 1, 2, \dots$ 自身とする。各 ν について ζ^ν は実行可能であるから、

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{i=1}^n x_j^{i\nu} \leq y_j^\nu + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, \dots, \ell, \\ 0 &\leq x_{\ell+1}^{i\nu} \leq y_{\ell+1}^\nu, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ y^\nu &\in Y \end{aligned}$$

を満たす。この不等式を見ると、ある経済主体のある財が無限に発散するときには生産者の対応する財が無限に発散する必要がある。しかも、負値をとる投入に対応する所期保有の総量を加えると必ず非負値になるということも判る。したがって、無限に発散する財は生産されるものでなければならない。それを第 k 財とする。したがって、

$$\begin{aligned} y_k^\nu &\rightarrow \infty \text{ as } \nu \rightarrow \infty \\ |y_j^\nu| &\leq y_k^\nu, \quad \forall j = 1, \dots, \ell+1 \end{aligned}$$

とすることができる。ここで、生産可能集合 Y が $0 \in Y$ かつ凸集合であることを勘案すれば、[†]

$$\frac{1}{y_k^\nu} y^\nu = \frac{1}{y_k^\nu} y^\nu + \left(1 - \frac{1}{y_k^\nu}\right) 0 \in Y, \quad \nu = 1, 2, \dots$$

である。左辺の極限を \bar{y} とすれば、 Y の閉集合性から $\bar{y} \in Y$ である。しかし、 \bar{y} のあらゆる要素は非負であると同時に $\bar{y}_k = 1$ である。つまり、 $\bar{y} \in \mathbb{R}_+^{\ell+1} \setminus \{0\}$ かつ $\bar{y} \in Y$ が成り立つ。これは矛盾である。

以上の推論で集合 F がコンパクトであることが判った。[‡]

[†] 正確には $y_k^\nu > 1$ となるほど十分に大きな ν を選ぶということが必要であるが、この点は明記していない。同様に、 y_k^ν が各 ν について生産される財の中で最大ものであるという記述も必要であったが、明らかなので明記していない。

[‡] The attainable set is compact.

1.4.2 最大化問題，ラグランジュ法そして制約想定

以下の説明は O.L., Mangasarian (1969) *Nonlinear Programming*, (McGraw-Hill New York) の「第 7 章 微分可能な非線形計画に対する最適性の判定条件」によっている。変更はほとんどなく，あえて言えば，「最小化問題」を「最大化問題」に書き換えただけのものであるので，定義と定理のみを示しておく。証明は原本を参照されたい。この本には翻訳，関根智明訳『非線形計画法』培風館，昭和 47 年がある。

[Non-Linear Programming] X° を \mathbb{R}^n の開集合， $\theta(\cdot)$ を X° 上で定義された実数値微分可能関数， $g(\cdot)$ を X° 上で定義された微分可能な m 次関数，つまり， $g(\cdot) \stackrel{\text{def}}{=} (g_1(\cdot), \dots, g_m(\cdot))$ とする。関数， $\phi(x, u) \stackrel{\text{def}}{=} \theta(x) + ug(x)$ ， $x \in X^\circ$ ， $u \in \mathbb{R}_+^m$ を定義しておく[†]。次の 2 種類の問題を準備する。

[†] 関数 $\phi(\cdot)$ がラグランジュ関数になっていることに注意せよ。

(MP) find \bar{x} maximizing $\theta(x)$ subject to $x \in X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X^\circ \mid g(x) \geq 0\}$

(KTP) find \bar{x} , \bar{u} satisfying[‡]

[‡] (KTP) は Kuhn-Tucker Problem の略である。

$$\begin{aligned}\nabla_x \phi(\bar{x}, \bar{u}) &= 0 \\ \nabla_u \phi(\bar{x}, \bar{u}) &\geq 0 \\ \bar{u} \nabla_u \phi(\bar{x}, \bar{u}) &= 0 \\ \bar{u} &\geq 0.\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}\nabla_x \phi(\bar{x}, \bar{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(\bar{x}, \bar{u}), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial x_n}(\bar{x}, \bar{u}) \right) \\ \nabla_u \phi(\bar{x}, \bar{u}) &\stackrel{\text{def}}{=} \left(\frac{\partial \phi}{\partial u_1}(\bar{x}, \bar{u}), \dots, \frac{\partial \phi}{\partial u_m}(\bar{x}, \bar{u}) \right) = g(\bar{x})\end{aligned}$$

である。

(MP) に解 $\bar{x} \in X^\circ$ があれば，(KTP) が必要条件であることはさまざまな教科書で利用されている。これについて 2 点注意をしておきたい。一つ

は X° が開集合であることである。したがって、いわゆる端点解を想定していないという点がある。さらに、定義域 X° を開集合としているため、集合 X は必ずしもコンパクト集合ではない。したがって、ワイヤーシトラウスの定理を、このままでは、適応できない。実際にクーン・タッカーの必要条件を得るには、まず第一に X° を含む閉集合 (X° の閉包) 上で関数 (θ, g) を定義しておき、(MP) をコンパクト集合上の最大化問題として表現する。その後ワイヤーシトラウスの定理を用いて解の存在を示し、ついでその解が境界になく、 X° に入っていることを示すというステップが必要である。第2は (KTP) は無条件では必要条件とはならないことである。すなわち、以下で紹介される追加的な条件が必要とされる。「クーン・タッカー条件が (MP) の必要条件となるためには追加的な条件 (制約想定 constraint qualification とよばれる) が必要である」ことに注意を喚起しておこう。

\mathbb{R}^n の凸集合 X° で定義された m ベクトル関数 $g(x)$ について、

$$X \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X^\circ \mid g(x) \geq 0\}$$

とする

いろいろな制約想定 constraint qualification

クーン・タッカーの制約想定 Kuhn-Tucker's constraint qualification

g が \bar{x} において微分可能で、かつ

$$y \in \mathbb{R}^n \text{ かつ } \nabla g_I(\bar{x})y \geq 0$$

であるならば、区間 $[0, 1]$ 上で定義され、次の3つの条件を満たす n 次元ベクトル関数 e が存在する。

(a) $e(0) = \bar{x}$

(a) $e(\tau) \in X, 0 \leq \tau \leq 1$

(c) e は $\tau = 0$ で微分可能、かつある $\lambda > 0$ に対して、 $\frac{de(0)}{d\tau} = \lambda y$

を成立させるとき, g は $\bar{x} \in X$ でクーン・タッカーの制約想定を満たすという。ここで, $I \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$ である。

アロー・ハービッツ・宇沢の制約想定 Arrow-Hurwicz-Uzawa's constraint qualification

g が \bar{x} において微分可能で,

$$\nabla g_W(\bar{x})z < 0, \nabla g_V(\bar{x})z \leq 0$$

に解 $z \in \mathbb{R}^n$ が存在するであるならば, g は $\bar{x} \in X$ でアロー・ハービッツ・宇沢の制約想定を満たすという。ここで,

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid g_i(\bar{s}) = 0 \text{ かつ } g_i \text{ が } \bar{x} \text{ で凸} \}$$

$$V \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid g_i(\bar{s}) = 0 \text{ かつ } g_i \text{ が } \bar{x} \text{ で凸ではない} \}$$

である。

逆凸制約想定

g が \bar{x} で微分可能, かつすべての $i \in I \stackrel{\text{def}}{=} \{ i \mid g_i(\bar{x}) = 0 \}$ にたいして, (i) g_i が \bar{x} で凸, (ii) g_i が \mathbb{R}^n 上で線形, のいずれかが成立するとき, g は逆凸制約想定を満たしているという。

スレイターの制約想定 Slater's constraint qualification

m ベクトル関数 $g(x)$ は凹関数であり, $g(x^*) > 0$ かつ $x^* \in X$ が存在するならば, g は Slater の制約想定を満たすという。

カーリンの制約想定 Karlin's constraint qualification

m ベクトル関数 $g(x)$ が凹であり, 任意の $x \in X^\circ$ に対して, $pg(x) \leq 0$ かつ $p \in \mathbb{R}^m, p \geq 0$ を満たす p が存在しないならば, $g(\cdot)$ は Karlin の制約想定を満たすという。

[注意] Slater の制約想定と Karlin の制約想定は同値である。

定理 1.4 [クーン・タッカーの必要条件] X° 開集合, θ, g を X° で定義された関数とする。 \bar{x} を (MP) の解とすると, θ と g が微分可能であり, さらに g は次の条件のうちで少なくとも一つを満たすものであるとする。

- (i) \bar{x} においてクーン・タッカーの制約想定を満たす。
- (ii) \bar{x} においてアロー・ハービッツ・宇沢の制約想定を満たす。
- (iii) \bar{x} において逆凸制約想定を満たす。
- (iv) \bar{x} においてスレイターの制約想定を満たす。
- (v) \bar{x} においてカーリンの制約想定を満たす。

このとき、 (\bar{x}, \bar{u}) が (KTP) の解となるような $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$ が存在する。

注意 上の必要条件では、 θ に凹性や準凹性を要求していないことに注意せよ。さらに、スレイターの制約想定とカーリンの制約想定を除けば、制約想定には、 g に凹関数性の要求はない。

第2章 様々な均衡概念

前章の議論を受けて、この章では公共財を含む経済における代表的な3種類の均衡概念を紹介する。一つは、古典的なリンダール均衡であり、次は租税の概念を導入した公共的競争均衡である。最後は、ナッシュ均衡の概念を利用した私的供給モデルである。

リンダール均衡 Lindahl equilibrium は私的所有経済における効率的メカニズムを公共財の水準決定に適用しようとするものであり、その効率性は前章第2節で考察した厚生経済学の第1基本定理と同一の方法によって示される。一方、公共的競争均衡 public competitive equilibrium は、基本的には前章の3節2項の議論に基づく。これら2つの均衡概念はパレート効率性を達成させるように設計されているが、そのための基礎となる経済主体の行動やそのための制度には多少の疑問が残される。つまり、リンダール均衡においては、家計が公共財にフリーライドする可能性を排除できていない。すなわち誘因両立性 incentive compatibility を持たないことが指摘される。また、公共的競争均衡では、租税の強制力を考慮するので、その限りでは家計に効率的資源配分から逸脱するような行動に走らせることはない。しかし、租税として利用されているものは一括税 lump-sum tax であり、予め効率的な公共財の水準やそのための費用の額が知られている必要がある。これは背後に強い仮定をおいていると言わねばならない。最後の私的供給モデル private provision of public goods は、(i) フリーライダーの存在を認め、(ii) 政府の公共財供給の役割をあまり考慮せず、寄付によって私的に公共財が提供される状態を記述しようとするものである。公共財への私的貢献はナッシュ均衡 Nash equilibrium によってモデル化される。ナッシュ均衡が現実経済をどの程度の説明できるかというテーマが現在の公共財の理論の最前線にある。

2.1 リンダール均衡

この節で説明されるリンダール均衡では、公共財は市場における私的な交換によって供給される。市場経済の延長上に公共財をおくことによって、効率的な公共財を供給を考察しようとするものである。「公共財を市場経済の延長上に置くこと」とは、(i) 公共財の価格を与え、(ii) それに応じて各経済主体に競争均衡におけるような行動をさせ、(iii) 需要と供給の一致によって経済を記述すること、である。

この節における財の数、家計や生産者に関する設定は、前章第3.2節でのものと同一のものである。前章3.1節で得られたサミュエルソン条件あるいは、3.2節で得られた分離平面の法線ベクトルから類推されることは、公共財価格は家計によって異なり、かつ、生産者の公共財価格は家計の公共財価格の和と一致するというものである。家計の公共財価格には個人化価格 *personalized price* あるいは税価格 *tax price* という名前が付けられ、家計によって異なるものである。それを $p_{\ell+1}^i$, $i = 1, 2, \dots, n$ と書く。さらに、企業の利潤 π は家計に完全に分配され、各家計 i の利潤の分配比率 $\theta^i \geq 0$ があり、 $\theta^i \pi$ は家計 i が受け取る利潤の分配分である。ただし、 $\sum_{i=1}^n \theta^i = 1$ である。

定義 2.1 次の条件 (a), (b), (c) を満たす価格と配分の組 $((x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*), (p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}^1, \dots, p_{\ell+1}^n))$ をリンダール均衡という。

(a) y^* は最大化問題

$$\max p_j y_j + (\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i) y_{\ell+1} \quad \text{subject to } y \in Y$$

の解である。利潤を $\pi \stackrel{\text{def}}{=} p_j y_j^* + (\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i) y_{\ell+1}^*$ と書く。

(b) x^{i*} は最大化問題

$$\max_{x^i} u_i(x^i) \quad \text{subject to } \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^i + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^i \leq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi$$

の解である、 $i = 1, 2, \dots, n$ 。

(c) 市場均衡条件

$$\sum_{i=1}^n x_j^{i*} = y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$x_{\ell+1}^{1*} = x_{\ell+1}^{2*} = \cdots = x_{\ell+1}^{n*} = y_{\ell+1}^*$$

が満たされる。

定理 2.1 リンダール均衡で得られる配分はパレート効率的である。

この定理は第一章の厚生経済学の第一基本定理と同じようにして証明できる。

上で定義されたリンダール均衡は「個人ごとに異なる価格を公共財に付ける競争均衡」という特徴を持っている。第一に競争均衡 competitive equilibrium であるということが定理 2.1 を成立させた。第二に「価格が異なる」ということは「家計ごとに異なる財である」という理解にきわめて近い。前章 3.2 節において変換 ξ^i, η を用いて、家計の数だけ次元を増やしたという手続きは正しくこの内容を映し出していたのである。このように、家計によって異なる公共財の価格は個人化価格 personalized price あるいは税価格 tax price と呼ばれる。

そのように理解するならば、第 i 家計の公共財の市場は第 i 家計と生産者の二人が出会って公共財を取引する場である。このような市場は 擬似市場 quasi market と呼ばれる。

以上によって、次のような理解が生まれた。つまり、

[租税価格論] 租税とは公共財の価格である。課税は強制的に民間から公的部門に購買力を移転することでは、必ずしもなく、公共財の提供にたいする反対給付である。

という理解である。これはリンダール均衡の概念が生み出される以前の財政学にとっては革命的な見方であった。

実証的に考えるならば、リンダール均衡という「公共財の市場、擬似市場 quasi-market」は現実には存在しない。仮に存在したとしても、双方独占的な市場であるため、家計 i と生産者が「競争的」に価格受容者として行動することは、通常は、望めない。前章で公共財を含む経済のパレート効率的資源配分はサミュエルソン条件を満たすこと（限界代替率の家計に関する和 = 限界変換率）が示された。パレート効率性の条件を調べることは公共財への理解を深めるであろうし、公共財供給のありかたについて示

唆が得られるであろうと思われたのである。しかしリンダール均衡の前提となる双方独占的な市場は現実には存在しない。

さらに、公共財は市場による自発的交換にそぐわないという本来の問題からすると、「リンダール的な市場がうまく機能すれば」という想定自体がいささか方向感覚を失ったものであるといえよう。従って、リンダール均衡はパレート効率性を表現するある種の規範的なモデル、あるいは判断のための標準モデルであるということになる。

一方、リンダール均衡における税価格の役割が明らかになって以来、家計の公共財に対する限界的評価（公共財の限界代替率）に応じて負担するのが“効率性という目的に合致する”という理解を誕生させた。これが「多くの（限界）便益をえる者が多くを負担すべきだ」という“受益者負担原則”，あるいは古くからの利益説につながるのである。

誘因両立性 上で紹介したリンダール均衡に対する意見あるいは批判は、家計は競争的な価格受容者として行動しないであろうという論点に立脚している。つまり、家計はすすんで公共財の需要を正直に答える誘因を持たないかもしれない、すなわちリンダールの個人化価格による公共財量の決定は誘因両立性 *incentive compatibility* を持たない可能性があるということである。以下、そのような事態が発生することを例によって確かめておきたい。

家計の数を2，財の数を2（1私的財，1公共財）とし，両方の家計の効用関数を同一の

$$u(x_1, x_2) = x_1 \times x_2$$

とする。公共財1単位を生産するためには私的財1単位が必要であると仮定する。私的財価格を1と基準化しておく。2家計はともに私的財を1単位だけ保有しているものとする。まず、基準となるリンダール均衡では各家計の税価格を p^1, p^2 とすれば、需要関数は、

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2(p^i) = \frac{1}{2p^i}$$

である。よって、

$$\frac{1}{2p^1} = \frac{1}{2p^2} = (1 - 1/2) + (1 - 1/2)$$

$$p^1 + p^2 = 1$$

によってリンダール均衡が表現される。これを解くと、

$$p^1 = p^2 = 1/2$$

であり、各家計はともに、 $x_1 = 1/2, x_2 = 1$ だけを消費する。したがって、 $u(x_1, x_2) = 1/2$ だけの効用水準になる。

一方、第1家計はリンダールの市場で個人化価格 p^1 にたいして正直に自らの公共財需要を答え、第2家計は p^2 に対して公共財需要を半分だけ答えるという想定をしてみる。すると、第2家計の表明する需要は $x_2(p^2) = 1/4p^2$ 、 $x_1(p^2) = 1 - p^2(1/4p^2)$ となる。したがって、需給均衡条件は

$$\frac{1}{2p^1} = \frac{1}{4p^2} = (1 - 1/2) + (1 - x_1(p^2))$$

$$p^1 + p^2 = 1$$

によって表される。これを解くと、 $p^1 = 2/3, p^2 = 1/3$ となる。各家計の効用を計算すると、

$$\text{第1家計： } u(1/2, 3/4) = 3/8 < 1/2$$

$$\text{第2家計： } u(3/4, 3/4) = 9/16 > 1/2$$

となる。これはリンダール均衡における効用水準よりも高いことを示している。したがって、第2家計は公共財の市場で需要を正直に答えるインセンティブが存在しない。正直に需要を答えている家計1はより低い効用を得ることになる。この事態は家計2が公共財の需要を低く答えることによって、家計1の提供する公共財にフリーライドしたということである。

上の例は、リンダール均衡においては「効率性」と「家計が自ら進んで、公共財の需要を正直に表明すること」が両立しないことを示している。一

般に市場は経済主体が自身の利益のみを追求するという非協力的な側面を有していると理解されている。この意味では、リンダール均衡において想定されている公共財の擬似市場は協力的 cooperative な市場であると言わねばならない。

リンダール均衡に関するこのような理解は、現在、遂行理論 Implementation Theory として、いかにメカニズムを構築するかという議論につながっている¹。

2.2 公共的競争均衡

リンダール均衡は前節で考察したように、

- (i) 効率的な資源配分と両立するものの、
- (ii) 必ずしも誘因両立性を持たず、
- (iii) 本来非協力的な市場において家計の協力的な行動を想定している

という性質を有していた。このように錯綜した、あるいは混乱したと言ってもよいかもしれないが、理由は公共財を市場の延長上で理解しようとしたところにある。公共財は本来市場で取引されるにはそぐわない財、すなわち、市場の失敗の一例として取り上げられる。このような当初の理解からすれば、リンダール均衡が上に掲げたような性質を有するのは無理のないところである。リンダール均衡の利点は、したがって、描いている世界そのものにあるのではなく、効率性と市場的行動が整合するには解決すべき問題が多く残されていることを示したところにある。

公共的競争均衡 public competitive equilibrium という均衡概念が Foley (1972) によって考案された。この節では、Foley による方法を離れ、前章の 3.2 節で得られた成果を利用して公共的競争均衡を解説する。前章 3.2 節の仮定はすべて前提とされる。

¹G. Tien (1989). "Implementation of Lindahl Correspondence by a single valued, feasible and continuous Mechanism," *Review of Economic Studies*, Vol.56, pp613-621 を参照せよ。

定理 1.2 を再述してみよう。

[所得再分配下の市場均衡] (1.13) を満たす任意のパレート効率的な資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ を選んでおく。これは

$$\sum_{i=1}^n x_j^{i*} = y_j^* + \sum_{i=1}^n \omega_j^i, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$x_{\ell+1}^{1*} = \dots = x_{\ell+1}^{n*} = y_{\ell+1}^*$$

と考えるとよい。ある価格 $p^* \stackrel{\text{def}}{=} (p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}^1, \dots, p_{\ell+1}^n)$ が存在して、

[生産者] y^* は利潤最大化の解、つまり、任意の $y \in Y$ に対して

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j^* + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i \right) y_{\ell+1}^* \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i \right) y_{\ell+1}$$

である。左辺の値を π とする。

[家計] すべての家計について、効用の最大化と所得と再分配のシステム

$$I^i \geq \sum_{j=1}^{\ell} p_j \tilde{x}_j^i + p_{\ell+1}^i \tilde{x}_{\ell+1}^i \Rightarrow u_i(\tilde{x}^i) \leq u_i(x^{i*}),$$

$$I^i \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*}, \quad I^i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - T^i,$$

が成立する。ここで、 θ^i は家計 i の利潤へのシェアを表し、 $\theta^i \geq 0$ かつ $\sum_{i=1}^n \theta^i = 1$ を満たす。最後の式にある T^i は家計 i への所得再分配であり、正值なら所得の減少を負値なら移転を意味している。所得再分配と書いたのは次の関係

$$\sum_{i=1}^n T_i = 0$$

を満たすからである。

上の内容は、任意のパレート効率的資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ に適切な所得再配分 $(T^i)_{i=1}^n$ を施せば、ある価格体系（リンダールの個人価格を含む） $(p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}^1, \dots, p_{\ell+1}^n)$ が存在して、 y^* は利潤最大化の解であり、同時に x^{i*} が効用最大化の解となる、ことである。つまり、パレート効率的資源配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はある所得再分配のもとでのリンダール均衡として把握されたのである。

ここでは、この内容をさらに書き換えてみよう。消費者の予算制約に着目して、

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*} = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - T^i$$

であるから、

$$\sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - (T^i + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*})$$

と書き直し、 $\tau^i \stackrel{\text{def}}{=} T^i + p_{\ell+1}^i x_{\ell+1}^{i*}$, $i = 1, 2, \dots, n$ と定義してみる。すると、 $y_{\ell+1}^* = x_{\ell+1}^{i*}$ であることに着目して、最大化問題

$$\max_{x_1^i, \dots, x_\ell^i} u_i(x_1^i, \dots, x_\ell^i, y_{\ell+1}^*) \quad \text{subject to} \quad \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^{i*} = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - \tau^i$$

† 各自証明を試みよ。

を作ってみる。この解は明らかに $(x_1^{i*}, \dots, x_\ell^{i*})$ である†。また y^* が

$$\max_y \sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i \right) y_{\ell+1} \quad \text{subject to} \quad y \in Y$$

の解であることも明らかである。

以上の考察は、次の定理の成立を示している。

定理 2.2 次の条件 (a), (b), (c) そして (d) を満たす価格と配分、そして一括税の組 $((p_1, \dots, p_\ell, p_{\ell+1}), (x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*), (\tau^1, \dots, \tau^n))$ が存在する。これを公共的競争均衡 **public competitive equilibrium** という。

(a) 配分 $(x^{1*}, \dots, x^{n*}, y^*)$ はパレート効率的である。

(b) [家計の最適化] 各家計 i について $(x_1^{i*}, \dots, x_\ell^{i*})$ は

$$\max_{x_1^i, \dots, x_\ell^i} u_i(x_1^i, \dots, x_\ell^i, y_{\ell+1}^*) \text{ subject to } \sum_{j=1}^{\ell} p_j x_j^i = \sum_{j=1}^{\ell} p_j \omega_j^i + \theta^i \pi - \tau^i$$

の解である。

(c) [企業の最適化] y^* は

$$\max_y \sum_{j=1}^{\ell} p_j y_j + \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i \right) y_{\ell+1} \text{ subject to } y \in Y$$

の解である。

(d) [政府の予算] 政府の収支，

$$\text{税収} = \sum_{i=1}^n \tau^i = \left(\sum_{i=1}^n p_{\ell+1}^i \right) y_{\ell+1}^* = \text{政府支出}$$

が成立する。

(e) [市場均衡条件] 需給バランス：

$$\sum_{i=1}^n x_j^{i*} = \sum_{i=1}^n \omega_j^i + y_j^*, \quad j = 1, 2, \dots, \ell$$

$$x_{\ell+1}^{i*} = y_{\ell+1}^*, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

が成立する。

この定義では、条件 (a) のパレート効率性に (e) がほとんど含まれているが、明示しておく。さらに、(b), (c), (e) が成立すれば、(d) は成立することも明らかである[†]。

[†] これを示しなさい。またなぜこれが成立するかを説明しなさい。

このように定義された公共的競争均衡では、確かに課税の強制力によって公共財の費用が財源調達され、公共財が効率的に供給される状態が記述されている。特に、条件 (b) において公共財の水準が家計によって選択されていない点が「政府による供給」を描いており、現実と合致して優れた結果である。しかしながら、(b) と (c) の経済主体の行動から市場均衡 (e) を通じて資源配分のパレート効率性が得られるというようになっていない。すなわち、政府の公共財の量的選択が他の私的財との関係でサミュエルソン条件を満たすように選択されていないといけないのである。この点で、公共的競争均衡には改良の余地がある。さらに、税について「効率性と合致するような一括税がある」と主張しているのであるが、現実にもどのような税制度があればこれをサポートできるかという視点からも改良の余地があろう。

2.3 私的供給

リンダール均衡には「市場が理想的に機能すれば」、公共的競争均衡では「政府が賢明に行動できれば」という前提があり、モデル構築がなされていた。この節では、これまでの節にある、多少の規範的な部分をなくして、実証的に公共財の私的供給を記述することを目標にする。ここでは、効率的な公共財の配分を達成することを目標にするのではなく、家計にフリーライダーになることを含めて誘因両立的な行動を可能とするのである。今日自発的供給を表現するものとして、用いられている基本的枠組みはナッシュ均衡である²。

以下、まず自発的供給モデルを説明し、次にその均衡の持つ性質を解説する。この節は、二つの論文 Iritani and Yamamoto (2004a, b) に基づいている³。

²この分野の基本的文献は、Warr, P.G. (1983), "The Private Provision of a pure Public Good is independent in the distribution of Income," *Economics Letters*, 19, pp131-138. Bergstrom, T.C., Blume, L., and Varian, H. (1986), "On the Voluntary and involuntary provision of Public Goods," *Journal of Public Economics*, 29, pp25-49. である。

³Iritani, J. and S. Yamamoto (2004a), "Are Two Public Goods too Many?" Kobe

2.3.1 基本モデル

家計の数を n とし、財を私的財が 1 種類、公共財が 1 種類の経済を想定する。家計のインデックスの集合を $N \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\}$ で表す。家計 i の効用関数は $u_i : (x_i, G) \in \mathbb{R}_+^2 \mapsto u_i(x_i, G) \in \mathbb{R}$ である。 x_i は私的財、 G は公共財を表わす。いま、 $I \stackrel{\text{def}}{=} (I_1, \dots, I_n)$ をすべてが正の与えられた所得分配とする。組 $(N, (u_i(\cdot, \cdot), I_i)_{i \in N})$ を経済と呼ぶ。1 単位の公共財の生産には 1 単位の私的財投入が必要であるとする。そして、私的財の価格を 1 に基準化する。

効用関数に次の仮定をおく。

仮定 2.1 効用関数 $u_i(x_i, G)$ は \mathbb{R}_+^2 上で連続で増加的かつ準凹、 \mathbb{R}_{++}^2 上で厳密に増加的、かつ狭義準凹関数である、 $i \in N$ 。

いま、各個人の公共財の貢献分のリスト $(\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_n) \in \mathbb{R}_+^n$ があるとき、 $\tilde{G}_{-i} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} \tilde{g}_j$ 、 $i \in N$ として、次の最大化問題

$$\max_{x_i, g_i} u_i(x_i, \tilde{G}_{-i} + g_i) \quad \text{subject to} \quad x_i + g_i = I_i, \quad g_i \geq 0 \quad (2.1)$$

の解をパラメータへの依存関係を明示して $(x_i(I_i, \tilde{G}_{-i}), g_i(I_i, \tilde{G}_{-i}))_{i \in N}$ と表わす。このとき、公共財の自発的供給は次のように定義される。

定義 2.2 [ナッシュ均衡]

配分 $(x_i^*, g_i^*)_{i \in N}$ が経済 $(N, (u_i, I_i)_{i \in N})$ におけるナッシュ均衡であるとは、 $G_{-i}^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j \neq i} g_j^*$ 、 $i \in N$ と定義するとき、この配分が、

$$g_i(I_i, G_{-i}^*) = g_i^*, \quad \forall i \in N, \quad (2.2)$$

$$x_i^* = x_i(I_i, G_{-i}^*), \quad \forall i \in N \quad (2.3)$$

を満たすことである。

University Graduate School of Economics Discussion Paper No. 0311.
Iritani, J. and S. Yamamoto (2004b), "The Private Provision of Public Goods: Neutrality, Efficiency, Equity and Population," Kobe University Graduate School of Economics Discussion Paper No. 0312.

定義 2.2 から見てとれるように、価格体系は可能な限り単純化され、体系外で決まるように設定されている。加えて、財の数は私的財においても公共財においてもともに1とされる。これらは必要以上にモデルを複雑にしないで考察しようということである。一般に、価格を内生化するように拡張したり、複数財で考察するように拡張することは容易であろうと考えられている⁴。

この自発的供給の定義では第 i 家計は他の家計の公共財への貢献の総量 G_{-i}^* を知った上で、彼の貢献量 g_i^* を決めている。したがって、彼は自身の貢献について嘘の量を表明するメリットは存在しない。その意味では誘因両立性があるように見える。しかもフリーライダーになることを含めた決定が彼に任されているのである。均衡状態に限れば、この点では、現実の公共財に関する個人の行動について、良好な現実記述性を性質を有しているように見える。

上で解説してきた自発的供給モデルの現実記述性が希薄な点について議論をしておかねばならない。それは、均衡の (g_1^*, \dots, g_n^*) がどのようにして与えられるかという点である。すなわち、恣意的に与えられる公共財への貢献の組 (g_1, \dots, g_n) がナッシュ均衡であることは望めないであろうから、ある (g_1, \dots, g_n) から出発して均衡の (g_1^*, \dots, g_n^*) に至る調整メカニズムが与えられる必要がある。もしそのメカニズムが明示されるならば、家計はそれを考慮に入れて行動をはじめであろう。その結果、問題 2.1 は誘因両立性を持たず、したがって、家計の行動を記述できていないという事態になる可能性がある。

これに加えて、 (g_1, \dots, g_n) の変更メカニズム自体が現実の何に対応しているかという疑問点もある。何らかの繰り返しゲームのような状況を想定すれば、 (g_1, \dots, g_n) の変更メカニズムが想定できよう⁵。そのときに、現実の (g_1, \dots, g_n) の変更メカニズムを探り出して、それを繰り返しゲームの中に埋め込むという作業が残されている⁶。

⁴Iritani-Yamamoto (2004b) では複数の公共財を含む経済に拡張することが困難であることが示されている。

⁵競争均衡においては、現在の (g_1, \dots, g_n) の変更メカニズムに相当するものは、価格の調整である。価格が均衡をもたらすまで変動すると想定されているが、「呼び値変動」の結果であると理解されている。そのような競争均衡には価格の変動という現実の対応物がある。

⁶繰り返しゲームの設定において最も考察される可能性があるものは、公共財を含む経済の

2.3.2 中立性

この分野の多くの議論において、直接的に問題 (2.1) を考察するよりも、より便利な最大化問題がある。つまり、 $Y_i, i = 1, 2, \dots, n$ をある水準の所得とすると、人工的な最大化問題

$$\max_{x_i, G} u_i(x_i, G) \quad \text{subject to } x_i + G = Y_i, \quad (2.4)$$

である。この解を $(\xi_i(Y_i), \phi_i(Y_i))_{i \in N}$ と表わす。(2.4) は (2.1) の解の性質を考察するために用いられる問題である。関数 $x_i(I_i, \tilde{G}_{-i}), g_i(I_i, \tilde{G}_{-i}), \xi_i(Y_i), \phi_i(Y_i)$ は共に需要関数である。

いま、 $Y_i, i \in N$ を未知数とする連立方程式、

$$\phi_i(Y_i) = \phi_j(Y_j), \quad \forall i, j \in N, \quad (2.5)$$

$$\phi_i(Y_i) = \sum_{i=1}^n (I_i - \xi_i(Y_i)), \quad (2.6)$$

を考察する。このとき、次の定理を示すことができる。

定理 2.3 仮定 2.1 を前提とする。このとき、 $x_i^* > 0, g_i^* > 0, i \in N$ を満たすナッシュ均衡 $(x_i^*, g_i^*)_{i \in N}$ が存在する必要十分条件は、(2.5), (2.6) には $I_i - \xi_i(Y_i^*) > 0, i \in N$ を満たす正の解 $Y_i^*, i \in N$ が存在することである。

[証明] $(x_i^*, g_i^*) > 0, i \in N$ をナッシュ均衡とする。 $Y_i^* \stackrel{\text{def}}{=} I_i + \sum_{j \neq i} g_j^*, i \in N$ とする。また、 $G^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \in N} g_i^*$ とすれば、 $Y_i^* = x_i^* + G^*$ は明らかである。よって、人工的な予算制約 $x_i + G_i = Y_i^*$ のもとで、 $u_i(x_i, G)$ を最大化する解 $(x_i^\#, G^\#)$ は $u_i(x_i^*, G^*) \leq u_i(x_i^\#, G^\#)$ を満たす。いま、

パレート効率的資源配分をサポートするようなフォーク定理として確立するものである。この種の定理を証明することはできるであろうが、「市場では公共財を効率的に供給することはできない」という「市場の失敗」を説明するものではなく、これらは公共財を含む経済の現実記述とは何かを考えさせるものである。

$u_i(x_i^*, G^*) < u_i(x_i^\#, G^\#)$ と仮定してみよう。 $0 < \lambda < 1$ にたいして,

$$x_i(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda x_i^\# + (1 - \lambda)x_i^*,$$

$$G(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \lambda G^\# + (1 - \lambda)G^*,$$

とする。 $x_i^* > 0$ かつ $G^* > \sum_{j \neq i} g_j^* > 0$ であるから, λ が十分 0 に近い数であれば, $x_i(\lambda) > 0$ かつ $G(\lambda) > \sum_{j \neq i} g_j^* > 0$ である。よって, 2点 (x_i^*, G^*) , $(x_i(\lambda), G(\lambda))$ は定義域の内点である。効用関数の狭義準凹性によって,

$$u_i(x_i^*, G^*) < u_i(x_i(\lambda), G(\lambda))$$

である。さらに, $x_i(\lambda) + G(\lambda) = Y_i^*$ であるから, 結局

$$\hat{g}_i \stackrel{\text{def}}{=} G(\lambda) - \sum_{j \neq i} g_j^* > 0$$

$$x_i(\lambda) + \left(G(\lambda) - \sum_{j \neq i} g_j^* \right) = I_i,$$

$$u_i(x_i(\lambda), G(\lambda)) = u_i(x_i(\lambda), \sum_{j \neq i} g_j^* + \hat{g}_i)$$

が成立する。これは (x_i^*, g_i^*) がナッシュ均衡であることに矛盾する。よって, (x_i^*, G_i^*) は $Y_i = Y_i^*$ のときの (2.4) の解である。これが任意の i について成立するから, Y_i^* , $i \in N$ は (2.5), (2.6) の解である。

次に十分性を示そう。 $Y_i^* > 0$, $i \in N$ を (2.5) と (2.6) の解とする。 $g_i^* \stackrel{\text{def}}{=} I_i - \xi^i(Y_i^*) > 0$, $x_i^* \stackrel{\text{def}}{=} \xi^i(Y_i^*) > 0$, $i \in N$ と定義する。 $x_i^* + g_i^* = I_i$ かつ $G^* \stackrel{\text{def}}{=} \phi_i(Y_i^*) = \sum_{j \in N} g_j^*$, $i \in N$ であるから, 問題

$$\max u_i \left(x_i, \sum_{j \neq i} g_j^* + g_i \right) \text{ subject to } x_i + g_i = I_i$$

の解を $(x_i^\#, g_i^\#)$ とすれば, $u_i(x_i^\#, \sum_{j \neq i} g_j^* + g_i^\#) \geq u_i(x_i^*, \sum_{j \neq i} g_j^* + g_i^*)$ が成立する。いま仮に, $u_i(x_i^\#, \sum_{j \neq i} g_j^* + g_i^\#) > u_i(x_i^*, \sum_{j \neq i} g_j^* + g_i^*)$ である

とする。 $x_i(\lambda) = \lambda x_i^\# + (1-\lambda)x_i^*$, $G(\lambda) = \sum_{j \neq i} g_j^* + \lambda g_i^\# + (1-\lambda)g_i^*$, $0 < \lambda < 1$ とする。 $x_i^* > 0$ かつ $g_i^* > 0$ であるから, $x_i(\lambda) > 0$ かつ $G(\lambda) > 0$ である。効用関数の狭義準凹性によって, $u_i(x_i(\lambda), G(\lambda)) > u_i(x_i^*, G^*)$ である。

$$\begin{aligned} x_i(\lambda) + G(\lambda) &= \lambda x_i^\# + (1-\lambda)x_i^* + \sum_{j \neq i} g_j^* + \lambda g_i^\# + (1-\lambda)g_i^* \\ &= \lambda(x_i^\# + g_i^\#) + (1-\lambda)(x_i^* + g_i^*) + \sum_{j \neq i} g_j^* \\ &= I_i + \sum_{j \neq i} g_j^* \\ &= x_i^* + \sum_{j \in N} g_j^* = Y_i^* \end{aligned}$$

も成立する。これは矛盾である。よって, 公共財のリスト $g_i^*, i \in N$ が与えられたとき, (x_i^*, g_i^*) は (2.1) の解である。したがって, $g_i^*, i \in N$ は (2.2) の解である。■

この定理によって, (2.5) と (2.6) によって均衡の持つ性質を考察すればよいことが判る。この連立方程式は未知数は $Y_i, i \in N$ の n 個であり, (2.5) には $n-1$ 個の (2.6) には 1 個の方程式がある。したがって, 方程式と未知数の数は一致している。いま, この方程式の外生的なパラメータは $\sum_{i=1}^n I_i$ の一定値である。方程式の解は一般にパラメータの関数として表現できる。すなわち,

$$Y_i^* = Y_i \left(\sum_{j=1}^n I_j \right), i = 1, 2, \dots, n$$

である。ここで, 所得の総額 $\sum_{i=1}^n I_i$ を変えない所得再配分を行っても, 総額は変わらないから, 連立方程式 (2.5) と (2.6) の解は変わらない。したがって, 次の定理の成立を見る。

定理 2.4 [中立性命題] 公共財の自発的供給モデルにおいて, 所得再配分を行っても公共財の量と私的財の配分は変化しない。